НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

XII клас

Кратки решения и указания за оценяване

Зад.1. А) ***I. сл.*** $f(0).f(1) < 0$ ***2 точки***

$f(0) = m^2 - 4m + 11 > 0$ за всяко m;

$f(1) = m^2 - 12m + 27 < 0$, $m \in (3,9)$

II. сл. ***1 точка***

За $f(x)=0$, D=0 при $m=\frac{11}{4}$

$f(x)=0$ при $x = \frac{11}{16} \in (0,1)$

Решение $m \in \left\{\frac{11}{4}\right\} \cup (3,9)$

Б) D < 0, m < $\frac{11}{4}$, $f(x)>0$ за всяко x, най-малката стойност на $f(x)$ в

интервала [0,1] е положителна ***2 точки***

D ≥ 0 ⟹f(0)>0 и $\frac{m}{4} < 0$ или f(1)>0 и $\frac{m}{4} > 1 \Rightarrow m > 9$ ***2 точки***

Решение $m \in (-\infty, \frac{11}{4}) \cup (9, +\infty)$

Зад. 2. Даден е прав кръгов конус с лице на осно сечение

(сечение на конуса с равнина, минаваща през оста му), равно на Q.

а) Да се намери обемът на конуса,

ако ъгълът между образователната и височината му е β.

r.h = Q, $\frac{r}{h} = \tan\beta \Rightarrow r^2 = Q\tan\beta, V = \frac{\pi}{3}Q\sqrt{Q\tan\beta}$

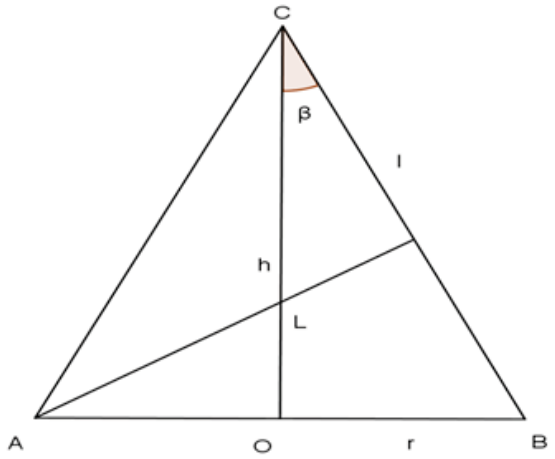
3 точки

б) За Δ AOC прилагаме свойството на ъглополовящите $\frac{LO}{LC} = \frac{r}{l}, l = 3r$ ***2 точки***

Нека лицето на околната повърхнина на конуса е S, то S=πrl = 3πQ$\tan\beta$

$\tan\beta = \frac{r}{h} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$ ***1 точка***

S= $\frac{3\pi Q}{2\sqrt{2}}$ ***1 точка***



math-bg.com

Зад.3

$\sqrt{4x^2-4x+5} = \sqrt{(2x-1)^2+4} \geq \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2x-1 = 0$, т.е. $x = \frac{1}{2}$ ***3 точки***

Тогава $1+\cos(2012\pi x) \leq 1$, $\cos(2012\pi x) \leq 1$ ***2 точки***

При $x = \frac{1}{2}$ $\cos(2012\pi x) = \cos(1006\pi) = \cos 0 = 1$ ***1 точка***

Уравнението има единствено решение $x = \frac{1}{2}$ ***1 точка***

<u>Оценяването е примерно</u>. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки. За областен кръг се класират ученици, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.

math-bg.com