ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 12.12.2015 г.

Примерни решения и критерии за оценка XI клас:

1 задача:

От формулите на Виет: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 . x_2 = k \end{cases}$ (1) ***(0,5т.)*** $\begin{cases} x_3 + x_4 = 12 \\ x_3 . x_4 = l \end{cases}$ (2) ***(0,5т.)***

$\vdash x_1 , x_2 , x_3 , x_4$

$\vdash x_1 , x_1 q , x_1 q^2 , x_1 q^3$

$$\begin{cases} x_1 + x_1 q = 3 \ (1) \\ x_1 . x_1 q = k \quad (2) \\ x_1 q^2 + x_1 q^3 = 12 \ (3) \\ x_1 q^2 . x_1 q^3 = l \quad (4) \end{cases}$$

4 равенства по ***0,5т.***

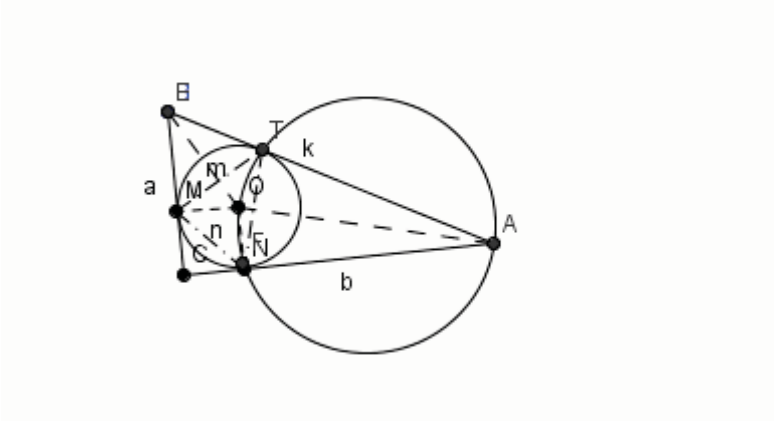
От (1) и (3) следва, че $q = \pm 2$ ***(1т.)***

Прогресията е растяща => $q = 2$ ***(1т.)***

$x_1(1 + q) = 3$, $x_1 = 1$, $k = 2$ ***(1т.)***

$l = 32$. ***(1т.)***

2 задача:



А) Нека допирните точки на вписаната окръжност със страните на триъгълника означим съответно с M,N,T

(N€AC, M €BC, T€AB). От ΔAOB намираме < AOB = 135^0 и чрез косинусова теорема – AB = 10. ***1 точка***

Понеже CNOM е квадрат със страна r и от свойствата на допирателните следва, че AN= AT = b-r, BN=BT=a-r, то b–r + a - r = 10. Това уравнение заедно с равенствата от Питагорова теорема за ΔONA и ΔOMB образуват системата
a + b – 2r = 10; $r^2 + (a - r)^2 = 20$; $r^2 + (b - r)^2 = 40$.

1 точка

От тази система намираме радиусът и другите две страни на триъгълника
r = 2, a = 6, b = 8. ***1 точка***

Б) Понеже CNOM е квадрат, то MN = r√2 = 2√2. ***1 точка***

В четириъгълника MBTO за ъглите<M + <T = 180^0 е изпълнено и следователно около него може да се опише окръжност с диаметър OB.

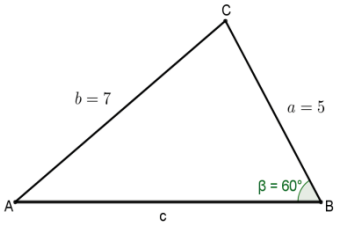
1 точка

От синусова теорема за ΔMBT получаваме MT = 1,6√5 и от NOTA се получава NT = 1,2√10. ***2 точки***

<u>3 задача:</u>

а) За ъглите $\div\alpha, \beta, \gamma$ е изпълнено $\left|\begin{array}{l} 2\beta = \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \beta = 60^\circ \\ \alpha + \gamma = 120^\circ \end{array}\right.$ **(1т.)**

Нека означим $BC = a = 5$, $AC = b = 7$ и $AB = c > 0$. От косинусова теорема за $\Delta ABC \Rightarrow$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow 7^2 = 5^2 + c^2 - 2.5.c.\cos 60^\circ$ намираме страната AB като положителният корен на квадратното уравнение $c^2 - 5.c - 24 = 0$ $c_1 = 8$ $c_2 = -3$
$AB = 8\,см.$ **(1,5т.)**

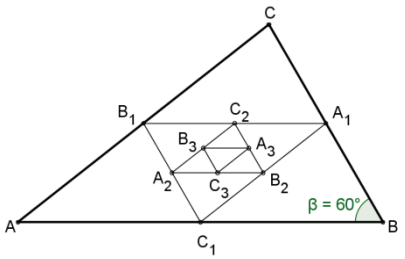


Лицето на триъгълника пресмятаме по формулата

$S_{ABC} = \dfrac{ac\sin\beta}{2} = \dfrac{5.8}{2}.\sin 60^\circ = 20.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,см^2.$ **(1т.)**

б) Средите на страните на $\Delta A_1B_1C_1$ са средни отсечки за ΔABC.
Средите на страните на $\Delta A_2B_2C_2$ са средни отсечки за $\Delta A_1B_1C_1$.
Средите на страните на $\Delta A_3B_3C_3$ са средни отсечки за $\Delta A_2B_2C_2$ и т.н.
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_3B_3C_3 \sim \cdots$ по трети признак с коефициент $k = 2$. **(1т.)**

Лицата им се отнасят $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{S_2}{S_3} = \cdots = k^2 = 4$



$S_{ABC} = S = 10\sqrt{3}\ см^2.$

$S_{A_1B_1C_1} = S_1 = \frac{1}{4}S = \frac{10\sqrt{3}}{4}\ см^2.$

$S_{A_2B_2C_2} = S_2 = \frac{1}{4}S_1 = \frac{10\sqrt{3}}{16}\ см^2.$

$S_{A_3B_3C_3} = S_3 = \frac{1}{4}S_2 = \frac{10\sqrt{3}}{64}\ см^2$ …. **(1т.)**

Получава се редицата от лица $S, S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$, която е геометрична прогресия с частно $q = \frac{1}{4}$ и е безкрайно малка. **(0,5т.)**

$\Sigma = S + S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots = \frac{S}{1-q} = \frac{10\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = 10\sqrt{3}.\frac{4}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3}\ см^2.$ **(1т.)**

Забележка: Оценяването е примерно. *Всяко друго* ***вярно*** *и* ***пълно*** *описание на решението на задачите, различно от предложените, се оценява с максимален брой точки.*

За областен кръг се класират ученици, получили не по-малко от 70% от максималния брой точки.