ОТГОВОРИ

1. в). **2.** а). **3.** а). **4.** в). **5.** а). **6.** в). **7.** б). **8.** г) — 240. **9.** в). **10.** б). **11.** а). **12.** б). **13.** $(-1,\ -2)$ и $(2,\ 1)$. **14.** 3 cm.

РЕШЕНИЯ

15. Полагаме $\sqrt[4]{x+8} = u$ и $\sqrt[4]{9-x} = v$. От уравнението получаваме, че двойката $(u,\ v)$ е решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} u + v = 3 \\ u^4 + v^4 = 17. \end{array} \right.$$

Тъй като

$$17 = u^4 + v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2(uv)^2 = \left[(u+v)^2 - 2uv\right]^2 - 2(uv)^2 =$$
$$(u+v)^4 - 4uv(u+v)^2 + 2(uv)^2 = 81 - 36uv + 2(uv)^2.$$

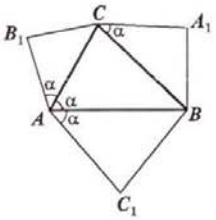
Произведението uv е корен на квадратното уравнение $(uv)^2 - 18uv + 32 = 0$. Оттук получаваме $uv = 2$ или $uv = 16$. Следователно достатъчно е да решим системите

$$\left| \begin{array}{l} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} u + v = 3 \\ uv = 16. \end{array} \right.$$

Втората система няма реални решения, а първата се удовлетворява от двойките $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 1$. Следователно $\sqrt[4]{x+8} = 1$ и $\sqrt[4]{x+8} = 2$, т. е. $x_1 = -7$ и $x_2 = 8$. Непосредствено се проверява, че числата -7 и 8 са решения на даденото уравнение.

16. Понеже $y = x-2$, то $xy = x(x-2)$. Изразът x^2-2x е положителен за отрицателни стойности на x. Цялата отрицателна стойност на x, за която той приема най-малка стойност е $x = -1$. Тогава $y = x - 2 = -1 - 2 = -3$ и $xy = (-1)(-3) = 3$.

17. Означаваме $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $\sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle CAB_1 = \sphericalangle BAC_1 = \sphericalangle BAC = \alpha$. Тогава $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. За лицата на равнобедрените триъгълници ABC_1, BCA_1 и CAB_1 получаваме



$S_{ABC_1} = \frac{1}{4}c^2 \operatorname{tg}\alpha$,

$S_{BCA_1} = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{tg}\alpha$ и $S_{CAB_1} = \frac{1}{4}b^2 \operatorname{tg}\alpha$.

Следователно равенството

$$S_{ABC} + S_{A_1BC} = S_{ABC_1} + S_{AB_1C}$$

е еквивалентно на

$$\frac{1}{4}\sin\alpha\left(2bc + \frac{a^2}{\cos\alpha}\right) = \frac{1}{4}\sin\alpha\frac{b^2+c^2}{\cos\alpha} \iff \frac{2bc\cos\alpha + a^2}{\cos\alpha} = \frac{b^2+c^2}{\cos\alpha}.$$

От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, откъдето $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$. Заместваме в горното равенство и получаваме

$$\frac{b^2+c^2-a^2+a^2}{\cos\alpha} = \frac{b^2+c^2}{\cos\alpha} \iff b^2 + c^2 = b^2 + c^2.$$

С това твърдението е доказано.