Математически турнир „Иван Салабашев“, 2014 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Ако m и n са естествени числа, за които $\dfrac{2^m 10^8}{1+7^2} = 2^{10}5^{n+1}$, да се намери $m+n$.

А) 8 **Б)** 9 **В)** 6 **Г)** 7

Отговор: А. От даденото равенство следва, че $2^{m+7}5^6 = 2^{10}5^{n+1}$, откъдето $m = 3$, $n = 5$ и $m + n = 8$.

2. В един триъгълник отношението на най-малкия и средния ъгъл е $1 : 2$, а на средния и най-големия е $14 : 15$. Да се намери сумата на най-малкия и най-големия ъгъл.

А) $120°$ **Б)** $116°$ **В)** $112°$ **Г)** $110°$

Отговор: Г. Ако означим наи-малкия ъгъл с x, то средният е $2x$ и тогава най-големият е $15x/7$. Тъй като сумата от трите ъгъла е $180°$, получаваме $36x/7 = 180$, откъдето намираме $x = 35$. Тогава най-големият ъгъл е $15.35/7 = 75$ и търсената сума е $110°$.

3. От цифрите x, y и z съставили шест различни трицифрени числа, във всяко от които всяка от цифрите участвала по веднъж. След това събрали шестте трицифрени числа и получили 3552. Да се намери сумата $x + y + z$. **А)** 14 **Б)** 15 **В)** 16 **Г)** 18

Отговор: В. От условието следва, че $\overline{xyz}+\overline{xzy}+\overline{yxz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}+\overline{zyx} = 3552$, т.е. $222(x+y+z) = 3552$, откъдето $x + y + z = 16$ (например $x = 4$, $y = 5$, $z = 7$).

4. Ако $\dfrac{a}{b} = 14$, то $\dfrac{a^2 - 8ab - 33b^2}{b^2}$ е равно на: **А)** 51 **Б)** 16 **В)** 33 **Г)** 14

Отговор: А. Имаме последователно $\dfrac{a^2 - 8ab - 33b^2}{b^2} = \dfrac{(a-11b)(a+3b)}{b^2} = \dfrac{a-11b}{b} \cdot \dfrac{a+3b}{b} = \left(\dfrac{a}{b} - 11\right)\left(\dfrac{a}{b} + 3\right) = 3.17 = 51$.

5. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 68°$. Върху правата AB са избрани точки M и N така, че $MA = AC$, $NB = BC$, A е между M и B, B е между A и N. Да се намери $\sphericalangle MCN$.

А) $128°$ **Б)** $124°$ **В)** $123°$ **Г)** $120°$

Отговор: Б. Триъгълникът MCA е равнобедрен и равните му ъгли са равни на половината от $\sphericalangle BAC$, т.е. $\sphericalangle MCA = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$. Аналогично $\sphericalangle NCB = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. Тогава $\sphericalangle MCN = \sphericalangle MCA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle NCB = \sphericalangle ACB + \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle ACB) = 90° + \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = 124°$.

6. Колко са двуцифрените числа $\overline{ab}$, които са делители на $\overline{a0b}$?

А) не може да се определи **Б)** 1 **В)** 12 **Г)** 24

Отговор: В. Да запишем условието във вида $10a+b|100a+b = 10(10a+b) - 9b$. Оттук следва, че $10a + b|9b$. Ако $b = 0$, решение дава всяка ненулева цифра a (дотук 9 решения). Ако $b > 0$, имаме $10a + b \leq 9b$, т.е. $5a \leq 4b$. Освен това $10a + b > b$ и не е възможно да имаме $10a + b|b$, следователно 3 е делител на $10a+b$, т.е. на $a+b$. Условията $b > 0$, $5a \leq 4b$ и $3|a+b$ оставят само възможностите $\overline{ab} = 12, 15, 24, 18, 27, 36, 45, 39, 48, 57$ и 69, от които само 15, 18 и 45 са решения. Получихме общо 12 решения.

7. Да се намери сумата на всички естествени числа n, които имат следното свойство: ако разделим n на 11, получаваме равни частно и остатък, ако разделим n на 17, също получаваме равни частно и остатък. **А)** 224 **Б)** 216 **В)** 208 **Г)** 200

Отговор: Б. От условието следва, че $n = 11q + q = 12(q+1)$ и $n = 17r + r = 18(r+1)$, като при това $0 \leq q \leq 10$ (т.е. $n \leq 12.11 = 132$). Освен това се вижда, че n се дели едновременно на

12 и на 18, т.е. на 36. Следователно $n = 36$, 72 или 108, като и трите числа са решения и сумата им е 216.

8. Върху страната AB на $\triangle ABC$ са разположени точки M и N така, че $AM : MN : NB = 2 : 2 : 1$, а върху страната AC – точка K така, че $AK : KC = 1 : 2$. Да се намери лицето на $\triangle MNK$, ако е известно, че лицето на $\triangle ABC$ е равно на 1 см^2.

А) $\frac{1}{7}$ см^2 **Б)** $\frac{3}{17}$ см^2 **В)** $\frac{1}{8}$ см^2 **Г)** $\frac{2}{15}$ см^2

Отговор: Г. От условието следва, че $S_{MNK} = \frac{2}{5}S_{AKB}$, а $S_{AKB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Тогава $S_{MNK} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{15}$.

9. Дадени са две успоредни прави, 6 различни точки върху едната от тях и 5 различни точки върху другата. Колко общо са триъгълниците и четириъгълниците с върхове в дадените 11 точки? **А)** 275 **Б)** 280 **В)** 285 **Г)** 300

Отговор: В. Всеки от исканите триъгълници има два върха на едната права и един на другата. Двата върха от правата с 5-те точки могат да бъдат избрани по $\binom{5}{2} = 10$ начина и дават $10.6 = 60$ триъгълника, аналогично получаваме $\binom{6}{2}.5 = 75$ триъгълника, общо 135 триъгълника. Четириъгълниците имат по два върха на всяка от двете прави и значи са общо $\binom{5}{2}\binom{6}{2} = 10.15 = 150$. Общо получаваме $135 + 150 = 285$ фигури.

10. Квадрат 8×8 е разделен на 64 клетки 1×1. Разглеждаме покритията на квадрата с черни и бели равнобедрени правоъгълни триъгълници с бедра 1, при които всяка клетка е покрита с точно два такива триъгълника. Едно покритие се нарича правилно, ако всеки два триъгълника с обща страна са с различен цвят. Колко са правилните покрития?

А) 2^{16} **Б)** 2^8 **В)** 2 **Г)** 2^{64}

Отговор: А. Във фиксирана клетка черен триъгълник може да заема 4 позиции (с правия ъгъл в кой да е от четирите върха) и тогава другият (бял) триъгълник е еднозначно определен. Нещо повече, ако определим цветовете на триъгълниците по главния диагонал, те определят еднозначно цялото покритие. Тъй като клетките по главния диагонал са независими, те могат да бъдат покрити по $4^8 = 2^{16}$ начина. (Друго обяснение със същия резултат се получава с анализ първо на ъглова клетка (4 възможности) и след това на клетките в нейния ред и стълб (по 2 възможности за всяка клетка, общо 2^7 за реда и за стълба), оттам нататък еднозначно).

11. Колко са естествените числа n със свойството: $n + 5$ дели 2014, а 2015 дели $2n + 11$.

Отговор: 1. Ако $n + 5 = 2014$, получаваме $n = 2009$, което не е решение (2015 не дели 4029). Следователно $2(n + 5) \leq 2014$ и $2015 \leq 2n + 11$, откъдето $n \leq 1002$ и $1002 \leq n$, т.е. $n = 1002$, което е решение на задачата.

12. Целите неотрицателни числа a, b, c и d са такива, че $2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+d} + 2^{d+a} = 27$. Да се намери сумата $a + b + c + d$.

Отговор: 4. Поне една от сумите $a + b$, $b + c$, $c + d$ и $d + a$ трябва да е равна на 0 (иначе сумата отляво е четно число). Нека $a + b = 0$, т.е. $a = b = 0$. Получаваме $2^c + 2^{c+d} + 2^d = 26$. Най-голямото от трите събираеми отляво е 2^{c+d} и то не може нито да е по-малко от 16 (защото тогава сумата не надминава 24), нито по-голямо от 16 (тогава сумата е поне 32). Следователно $2^{c+d} = 16$ и $c + d = 4$, откъдето $a + b + c + d = 4$ (например $a = b = 0$, $c = 1$, $d = 3$).

13. Иван си избрал естествено число n и написал на дъската числата $n - 100, n - 99, \ldots, n - 1, n, n + 1, \ldots, n + 99, n + 100$. Оказало се, че всички написани от Иван на дъската числа са естествени и най-голяма сума на цифрите измежду тях има числото n. Да се намери най-малкото n с това свойство.

Отговор: 999. От условието следва, че n е поне трицифрено. Освен това лесно се вижда, че ако n не завършва на 99, в редицата ще има число със същите начални цифри и 99 накрая, т.е. с по-голяма сума на цифрите. Тъй като $199, 299, \ldots, 899$ не вършат работа (защото $n + 100$ ще има по-голяма сума на цифрите), а 999 има исканото свойство, отговорът е $n = 999$.

14. Кое е най-малкото n, за което n-ъгълник може да бъде разрязан на следните 2012 фигури: един триъгълник, един четириъгълник, един петоъгълник и т.н., накрая един 2014-ъгълник?

Отговор: 3. Не е трудно да се съобрази как един триъгълник може да бъде разрязан на две части, k-ъгълник и $(k+1)$-ъгълник, за всяко $k \geq 3$ – изрязва се k-ъгълник със страна, обща с една от страните на триъгълника, и останалите $k-2$ върха вътрешни за триъгълника – тогава оставащата част е $(k+1)$-ъгълник. За исканото в задачата разрязваме отначало триъгълник на 1006 триъгълника, после първия от тях на триъгълник и четириъгълник, втория на петоъгълник и шестоъгълник и т.н., последния на 2013-ъгълник и 2014-ъгълник.

15. Комисията за борба с ненужното ксерокопиране (КБНК) била заподозряна в ненужно ксерокопиране. За да се провери дали това е вярно, била създадена Проверяваща комисия (ПК), която, за да може да си свърши работата, поискала да се направи по едно ксерокопие на всяка страница, разглеждана от КБНК, за всеки от осемте члена на ПК. Работата и на двете комисии била обслужвана от една и съща фирма, която ксерокопирала за КБНК на цена от 4 ст. на страница, а за ПК направила първите 2500 ксерокопия по 3 ст., а останалите – по 2 ст. В крайна сметка се оказало, че ПК е изхарчила за ксерокопиране 5 пъти повече средства, отколкото КБНК. Колко страници е разгледала КБНК?

Отговор: 625. Да означим с x броя на страниците, разгледани от КБНК. Тогава за нуждите на ПК са направени $8x$ копия, на обща цена

$$2500.3 + (8x - 2500).2 = 16x + 2500.$$

От условието следва, че тази сума е равна на $5.4x = 20x$. Получаваме $4x = 2500$, откъдето $x = 625$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.