ОТГОВОРИ

1. в). **2.** в). **3.** б). **4.** а). **5.** б). **6.** д) — 72. **7.** в). **8.** б). **9.** в). **10.** г) — 60. **11.** г) — $x = 2$. **12.** г) — $a_1 = 1024$. **13.** 15. **14.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$

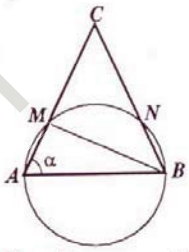
РЕШЕНИЯ

15. От условието на задачата следва, че даденото уравнение трябва да има два корена x_1 и x_2. Полагаме $2^x = t$ и даденото уравнение приема вида $t^2 - 2t + a = 0$ с корени $t_1 = 2^{x_1}$ и $t_2 = 2^{x_2}$. От $x_2 - x_1 = 1$ следва, че $2^{x_2 - x_1} = 2$, откъдето получаваме $\frac{2^{x_2}}{2^{x_1}} = 2$, т. е. $\frac{t_2}{t_1} = 2 \iff t_2 = 2t_1$.

От формулите на Виет имаме $t_1 + t_2 = 2$ и $t_1 t_2 = a$. Тогава от системата

$$\left| \begin{array}{l} t_2 = 2t_1 \\ t_1 + y_2 = 2 \end{array} \right.$$

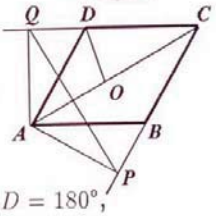
намираме $t_1 = \frac{2}{3}$ и $t_2 = \frac{4}{3}$. Следователно $8^{x_1} + 8^{x_2} = t_1^3 + t_2^3 = (t_1 + t_2)\Big((t_1 + t_2)^2 - 3t_1 t_2\Big) = 2\left(4 - 3.\frac{8}{9}\right) = \frac{8}{3}$. От $t_1.t_2 = a$ намираме $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = a$, откъдето $a = \frac{8}{9}$.



16. Означаваме $BM = h$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \alpha$. Тогава $\sphericalangle ACB = \pi - 2\alpha$. От правоъгълните триъгълници ABM и BCM получаваме $AM = h \operatorname{cotg} \alpha$, $CM = h \operatorname{cotg}(\pi - 2\alpha) = -h \operatorname{cotg} 2\alpha$. По условие $\frac{CM}{MA} = 2$. Тогава

$$2 = \frac{-h \operatorname{cotg} 2\alpha}{h \operatorname{cotg} \alpha} = -\frac{\operatorname{cotg} 2\alpha}{\operatorname{cotg} \alpha} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{2}$$

Следователно $\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = 4 \iff \operatorname{tg}^2 \alpha = 5$, откъдето $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$.



17. Означаваме $\sphericalangle BAD = \alpha$. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle APQ$ и получаваме

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP.AQ \cos \sphericalangle PAQ \iff 27 = 9 + 9 - 2.3.3 \cos \sphericalangle PAQ,$$

откъдето $\cos \sphericalangle PAQ = -\frac{1}{2}$, т. е. $\sphericalangle PAQ = 120°$.

От четириъгълника $APCQ$ намираме, че

$$\sphericalangle PAQ + \sphericalangle BCQ + 180° = 360° \iff 2\sphericalangle PAB + \sphericalangle BAD + \sphericalangle BAD = 180°,$$

откъдето $120° + \sphericalangle BAD = 180°$, т. е. $\sphericalangle BAD = 60°$ и $\sphericalangle PAB = \sphericalangle DAQ = 30°$.

От $\triangle ADQ$ намираме $AD = \frac{AQ}{\cos 30°} = 2\sqrt{3}$. Радиусът на описаната около равностранния $\triangle ABD$ окръжност е $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$. Центърът O на тази окръжност лежи на диагонала AC на ромба $ABCD$. Точката D е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. От $\triangle AOD$ по косинусовата теорема намираме

$$DO^2 = AD^2 + AO^2 - 2AD.AO \cos \sphericalangle OAD \iff DO^2 = 12 + 4 - 2.2.2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} \iff DO^2 = 16 - 12,$$

т. е. $DO = 2$.