

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Двадесет и трети турнир **Черноризец Храбър**
1 ноември 2014 г.

Инструкция (11–12 клас)

1. Време за работа 90 минути. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.

2. Към всяка задача са дадени 5 възможности за отговор. В бланката за отговори срещу номера на всяка задача напишете верния според вас, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.

3. Попълвайте бланката ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате съответното поле, т.е. да оставите полето срещу номера на задачата празно.

Забележка. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описваната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непопълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов и Йордан Табов.

Темата е съставена от Борислав Лазаров.

Двадесет и трети турнир „Черноризец Храбър“

Състезателна тема за 11–12 клас

1. Колко са положителните членове на шестчленната аритметична прогресия, за която $a_1 = 20$, $a_2 = 14$?

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) никое от тези

2. За безкрайната геометричната прогресия $\{a_n\}$ е дадено $a_1 = 20$, $a_2 = 14$. На колко е равна границата $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?

- А) $\frac{10}{7}$ Б) 0 В) $\frac{7}{10}$ Г) 1
Д) границата не съществува

3. В кой от посочените интервали е числото $\lg 20^{14}$?

- А) $[0; 1)$ Б) $[1; 10)$ В) $[10; 100)$
Г) $[100; 1000)$ Д) $[1000; +\infty)$

4. Ако $x_{1,2}$ са корените на уравнението $x^2 - 20x + 14 = 0$, то на колко е равна стойността на израза $x_1x_2 + x_1 + x_2$?

- А) 24 Б) 26 В) 28 Г) 30 Д) никое от тези

5. В кой от посочените интервали е числото $\cotg 2014^\circ$?

- А) $(0; 1)$ Б) $(1; 2)$ В) $(2; 3)$ Г) $(3; 4)$ Д) никое от тези

6. Ако $\lg 5 = a$, $\lg 7 = b$, то на колко е равен $\lg(20 \cdot 14)$?

- А) $2a + 3b$ Б) $3 - 2a + b$ В) $1 - a + b$ Г) $2 + 3a - 2b$
Д) никое от тези

7. Редицата a_n е зададена с равенствата $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n \forall n \in \mathbf{N}$. Кой е първият член на редицата, по-голям от 2014?

- А) a_5 Б) a_6 В) a_7 Г) a_8 Д) a_9

8. Кое е най-голямото цяло число, което не надминава числото $\log_{0,5} 2014$?

А) -12 Б) -10 В) 11 Г) 0 Д) никое от тези

9. На колко е равен най-големият ъгъл на триъгълника със страни $1, 3, \sqrt{13}$?

А) 110° Б) 120° В) 130° Г) 140° Д) 150°

10. За $\triangle ABC$ е дадено $BC = \sqrt{2}$, $AB = 1$, $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. На колко е равен $\sphericalangle BAC$?

А) 45° Б) 60° В) 135° Г) 150°

Д) не е определен еднозначно

11. Редицата a_n е зададена с равенствата $a_1 = 3$,
 $a_{n+1} = \frac{1}{1 - a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. На колко е равно a_{2014} ?

А) $-\frac{1}{2}$ Б) $\frac{2}{3}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $-\frac{2}{3}$ Д) никое от тези

12. На колко е равна най-малката стойност на израза
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z$,
в който x, y, z приемат произволни реални стойности?

А) -5 Б) -2 В) -1 Г) 0 Д) никоя от тези

13. За аритметичната прогресия $\{a_n\}$ е дадено $a_1 = 4$ и $a_8 = a_7 + a_1$. Пресметнете

$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{99}} + \sqrt{a_{100}}}$.

А) $-4,5$ Б) 18 В) $-49,5$ Г) 100 Д) никое от тези

14. Кое е най-голямото решение на уравнението

$$5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500 ?$$

А) $-\log_5 2$ Б) $\log_5 2$ В) 4 Г) -4 Д) никое от тези

15. Колко са естествените числа, по-малки от 2014 и взаимно прости с 2014 ? ($2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$)

А) 975 Б) 936 В) 1007 Г) 1001 Д) 892

16. В асансьор влизат 7 души. По колко начина те могат да слязат на 5 определени етажа така, че на всеки етаж да слезе поне един човек?

- А) 5040 Б) 50 400 В) 12 100 Г) 16 800
Д) никое от тези

17. На колко е равен диаметърът на най-малкия кръг, с който може да се покрие триъгълник със страни 5, 6 и 8?

- А) $2\sqrt{3}$ Б) $3\sqrt{2}$ В) 8 Г) 10 Д) никое от тези

18. На колко е равно лицето на всеки от трите еднакви малки кръга от логото на 31 БОМ (Плевен 2014), ако страната на равностранныя триъгълник е 36?

- А) 48π Б) 54π В) 72π Г) 96π Д) 108π



19. Кое е решението на уравнението $34_5 + 121_x = 152_6$, в което индексите показват основата на бройната система?

- А) 110_2 Б) 12_7 В) 13_4 Г) 100_3 Д) 11_8

20. Коя е най-малката стойност на функцията

$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| + |x - 6|$, определена за $x \in (-\infty; +\infty)$?

- А) 0 Б) 10 В) 6 Г) 4 Д) никое от тези

21. Определяме за всеки две числа a и b операцията $a \diamond b = a^2b - b + 1$. В коя от точките

- А) (1; 2) Б) (-1; 1) В) (0; -2) Г) (-1; 2) Д) (0; 1)

се пресичат графиките на функциите $f(x) = x \diamond 2$ и $g(x) = (-1) \diamond x$?

22. Числото A е най-голямото със свойството: в десетичен запис всеки две последователни цифри задават просто число и измежду тези прости числа няма повтарящи се. Колко са десетичните цифри на A ?

- А) 12 Б) 10 В) 11 Г) 9 Д) никое от тези

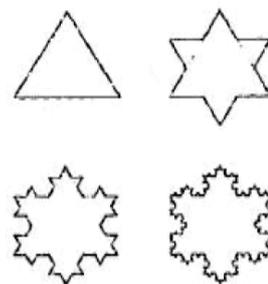
23. Радиусът на основата и височината на прав кръгов конус са съответно 4 и 3. На колко е равно най-голямото лице на сечение на конуса с равнина през върха му?

- А) 8 Б) $9\frac{1}{2}$ В) 11 Г) $12\frac{1}{2}$ Д) 15

24. Всяка от четири сфери с центрове A, B, C, D се допира външно до останалите три. Ако $AB = 6, BC = 8, CA = 7, CD = 9$, то на колко е равно BD ?

- А) 11 Б) 10 В) 9 Г) 8
Д) не може да се определи еднозначно

25. Снежиките на Кох се образуват при такава итеративна операция: K_0 е равностранен триъгълник с лице 1; ако n е естествено число и е създадена K_{n-1} , то K_n се създава, като всяка страна на K_{n-1} се разделя на три равни части и средната се заменя с две



равни на нея отсечки, разположени външно за K_{n-1} , както е показано на чертежа. Ако S_n е лицето на K_n , то на колко е равна границата $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$?

- А) $1\frac{4}{5}$ Б) $1\frac{3}{5}$ В) $1\frac{5}{8}$ Г) $1\frac{3}{8}$ Д) $1\frac{7}{8}$

26. Нека за естественото число $n \geq 2$ означим: с $\varphi(n)$ броя на взаимно простите с n естествени числа, по-малки от n ; със $\sigma(n)$ сумата от делителите на n ; с $\delta(n)$ броя на делителите на n . Колко са едноцифрените корени на уравнението $\varphi(n) + \sigma(n) = n\delta(n)$?

- А) 7 Б) 6 В) 5 Г) 4 Д) 3

27. Върху окръжност са отбелязани 11 точки по такъв начин, че след като се прекарат всевъзможните отсечки с краища тези точки, някои три не минават през вътрешна точка на кръга. На колко части тези отсечки разбиват кръга?

- А) 517 Б) 401 В) 386 Г) 265 Д) никое от тези

28. Аритметичната прогресия
 ΕΙΚΟΣΙ ΔΥΟ,
 ΤΡΙΑΝΤΑ ΕΞΙ,
 ΠΕΝΗΝΤΑ,
 ΕΞΗΝΤΑ ΤΕΣΣΕΡΑ,
 ΕΒΔΟΜΗΝΤΑ ΟΚΤΩ,
 ΕΝΕΝΗΝΤΑ ΔΥΟ

съдържа само цели числа от 20 до 99 (изписани на гръцки по едно на ред), две от които са точни квадрати. Кое ще е следващото число в тази прогресия?

- А) 102 Б) 103 В) 104 Г) 106 Д) 108

29. На колко нули ще завършва резултатът, който би се отпечатал от следния програмен фрагмент:

Функция $F(n)$:

{ако $n = 0$, то $F := 1$, иначе $F := n * F(n - 1)$;

$F(n) := F$;}

Функция $G(k, n)$:

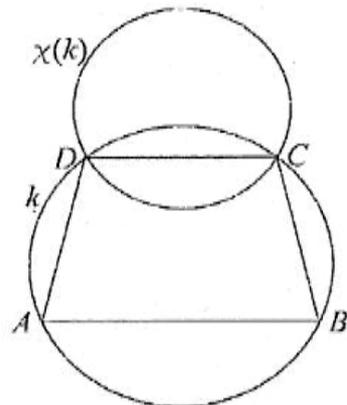
{ако $k = 0$, то $G := n$, иначе $G := F(G(k - 1, n))$;

$G(k, n) := G$;}

Отпечатай $G(3, 3)$.

- А) 162 Б) 168 В) 172 Г) 174 Д) 178

30. За трапеца $ABCD$ е дадено $BC = CD = DA = 1$, $AB = \sqrt{3}$. Нека O е пресечната точка на AD и BC , χ е хомотетията с център O и коефициент $\frac{\sqrt{3}}{3}$, k е описаната около $ABCD$ окръжност. На колко е равно лицето на частта от $\chi(k)$, външна за k ?



- А) $\frac{\sqrt{6 + \sqrt{3}}}{12}$ Б) $\frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}{6}$ В) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{6}$ Г) $\frac{\sqrt{9 + 4\sqrt{3}}}{12}$
 Д) никое от тези

Драги ученици,

Днес се провежда двадесет и третото издание на Есенния турнир **Черноризец Храбър**. Времето показва, че това престижно състезание събира за участие интелектуалния елит на българската младеж, а постигнатите резултати впечатляват нас – деятелите на науката и образованието, използвайки ни с оптимизъм за бъдещето на нацията. Убеден съм, че и този път, мерейки сили помежду си, но най-вече демонстрирайки солидни познания и математическо вдъхновение, ще посрещнете с радост и гордост Деня на народните будители.

Честит празник!



Доц. д-р Борислав Лазаров

Национален координатор на Турнира