

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

**Двадесет и четвърти турнир
Черноризец Храбър
31 октомври 2015 г.**

Инструкция (9–10 клас)

1. Време за работа 90 минути. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.

2. Към всяка задача са дадени 5 възможности за отговор. В бланката за отговори срещу номера на всяка задача напишете верния според вас, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.

3. Попълвайте бланката ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате съответното поле, т.е да оставите полето срещу номера на задачата празно.

Забележка. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описаната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непопълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов и Йордан Табов.

Темата е съставена от Борислав Лазаров.

Двадесет и четвърти турнир „Черноризец Храбър“

Състезателна тема за 9–10 клас

1. $\underbrace{20 \times 20 \times \cdots \times 20}_{15 \text{ множителя}} =$

- А) 15^{20} Б) $20 \cdot 15$ В) 2015 Г) 20^{15} Д) никое от тези

2. На колко нули завършва числото 20^{15} ?

- А) 20 Б) 15 В) 4 Г) 2015 Д) никое от тези

3. От площадката на първия до площадката на последния етаж на един вход от жилищен блок има 108 стъпала. Всяко стъпало е високо 15 см. Асансьорът се движи със скорост 36 метра в минута. За колко секунди асансьорът се изкачва от първия до последния етаж? (Площадките на и между етажите се считат за стъпала.)

- А) 27 Б) 60 В) 36 Г) 54 Д) никое от тези

4. Корените на уравнението $x^2 - 20x + 15 = 0$ са $x_{1,2}$. На колко е равно $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$?

- А) 2 Б) $\frac{17}{10}$ В) $\frac{74}{3}$ Г) $\frac{214}{15}$ Д) никое от тези

5. Дадени са числата $a_1 = 3$, $a_2 = 5$. След това образуваме числата a_3 , a_4 , a_5, \dots по правилото всяко следващо е разликата на предходното и пред-предходното, т.е. $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. На колко е равно a_{2015} ?

- А) 3 Б) -2 В) -5 Г) 4 Д) никое от тези

6. Кое число е с такава част от 2 по-голямо от 2, с каквато част от 3 е по-малко от 3?

- А) $\frac{7}{3}$ Б) $\frac{9}{4}$ В) $\frac{12}{5}$ Г) $\frac{15}{6}$ Д) никое от тези

7. Колко минути след 5 часа стрелките на часовника за пръв път образуват ъгъл 40° ?

- А) 15 Б) 20 В) 25 Г) 30 Д) никое от тези

8. На колко е равно лицето на фигурата, съставена от точките с координати $(x; y)$, за които $1 < |x| < 2$ и $2 < |y| < 3$?

- А) 4 Б) 8 В) 16 Г) 24 Д) 32

9. Колко градуса е острият ъгъл между диагоналите A_1A_{1878} и $A_{681}A_{2015}$ в правилния 2015-ъгълник $A_1A_2 \dots A_{2015}$?

- А) $\frac{817 \cdot 180^\circ}{2015}$ Б) $\frac{981 \cdot 180^\circ}{2015}$ В) $\frac{1017 \cdot 180^\circ}{2015}$ Г) $\frac{1198 \cdot 180^\circ}{2015}$
Д) никое от тези

10. Ако $xy = a$ и $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = b$, то $(x - y)^2 =$
А) $2a^2b - b^2$ Б) $2a^2b + 2b$ В) $a^2b - b^2$
Г) $ab^2 - 2a$ Д) $a^2b - 2a$

11. Няколко отбора играли всеки срещу всеки по един мач; за победа се дават 3 точки, за равен 1 точка, а за загуба 0 точки. В крайното класиране отборите събрали общо 74 точки. Колко мача са завършили наравно?

- А) 2 Б) 10 В) 18 Г) 34 Д) няма достатъчно данни

12. Колко са целите числа m , за които числото $M = \frac{m^2 + m + 4}{m^2 + 1}$ също е цяло?

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) никое от тези

13. Робинзон и Петкан обикалят брега на малък остров в противоположни посоки. Робинзон прави една обиколка за 40 минути, а Петкан за 24 минути. През колко минути се разминават?

- А) 12 Б) 15 В) 16 Г) 18 Д) никое от тези

14. За всяко $x \in (-\infty; +\infty)$ функцията $f(x)$ удовлетворява равенството $2f(x) - f(1-x) = 6x - 1$. Коя от точките лежи на графиката на тази функция?

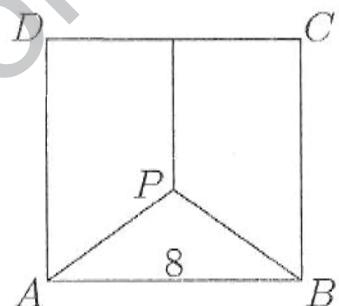
- А) $A(0; -1)$ Б) $B(1; 3)$ В) $C(-1; 1)$ Г) $D(2; 2)$
Д) никоя от тези

15. Кашалотът Дик тежал 15 т, сивият кит Моби – 20 т. Дик изял 1200 кг калмари, от което увеличил теглото си с 2 %. С колко процента увеличил теглото си Моби, който погълнал 0,8 тона риба, при положение, че рибата е с 25% похраниителна от калмарите? (Приемаме, че двата кита превръщат по един и същи начин приетото количество хранителни съставки в тегло.)

- А) 1,75 Б) 1,5 В) 1,25 Г) 1,2 Д) никое от тези

16. Дължината на страната на квадрата $ABCD$ е 8. Точката P е на равни разстояния от страната CD и от върховете A и B . На колко е равно PA ?

- А) 5 Б) $3\sqrt{2}$ В) $2\sqrt{3}$ Г) $2\sqrt{5}$
Д) никое от тези



17. $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$
А) 6 Б) $3+\sqrt{2}$ В) 8 Г) $2+3\sqrt{2}$ Д) никое от тези

18. Колко са точките с целочислени координати $(x; y)$, за които $|x+y| \leq 1$ и $|2x-3y| \leq 3$?

- А) 9 Б) 7 В) 5 Г) 3 Д) никое от тези

19. Колко са двойките естествени числа $(m; n)$, за които $m^4 + 4n^4$ е просто?

- А) 1 Б) 2 В) безбройно много Г) няма такива
Д) никое от тези

20. Правилен (n^2+1) -ъгълник има точно 2015 диагонала. На колко е равно n ?

- А) 9 Б) 8 В) 7 Г) 6 Д) 5

21. Колко различни трицифрени естествени числа могат да се представят като сума на точно три различни степени на 2?

- А) 81 Б) 85 В) 86 Г) 88 Д) 90

22. На чертежа $\angle AOB = 120^\circ$. Построени са полуокръжности с диаметри AO и BO . Ако лицето на сегмента върху хордата AB е 1, то на колко е равно лицето на частта от сектора AOB , външна за двете полуокръжности?

- А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Д) никое от тези

23. Най-големият естествен делител на естественото число n , различен от n , е с 2015 по-голям от квадрата на най-малкия естествен делител на n , различен от 1. Определете сбора от цифрите на n .

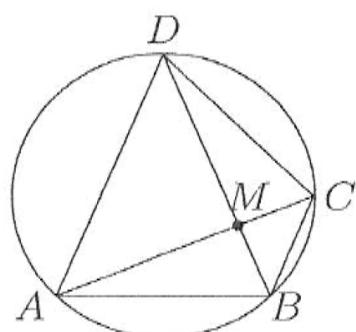
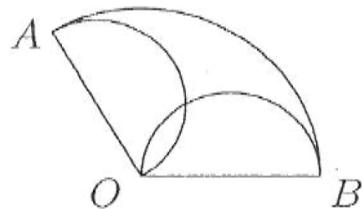
- А) 18 Б) 17 В) 16 Г) 15 Д) друг отговор

24. В окръжност с радиус 1 се вписва четириъгълник $ABCD$, при това точките A и B са неподвижни, C и D се движат по окръжността, като $AB = CD = \sqrt{2}$. Геометричното място на пресечната точка M на диагоналиите е линия. На колко е равна дължината на тази линия?

- А) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ Б) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ В) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ Г) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$ Д) никое от тези

25. Бублечка пропълзяла от A до C , следвайки най-къс път по околните стени ABM и BCM на правилна пирамида с връх M . Колко дълъг е този път, ако е дадено $AM = 1$ и $\angle AMB = 45^\circ$?

- А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Б) 2 В) $\sqrt{2}$ Г) $2\sqrt{2}$ Д) никое от тези



26. В единия връх на куб стои мравка. Всяка минута тя пропълзява по ръб до съседен връх. След 7 минути мравката била в най-далечния връх на куба. По колко различни начина може да се е движила?

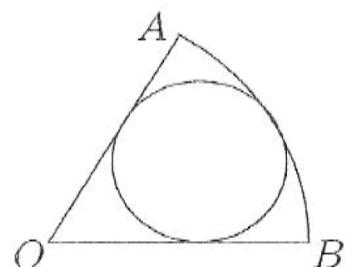
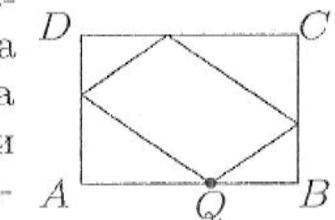
- А) 546 Б) 428 В) 126 Г) 42 Д) никое от тези

27. Правоъгълният билиард $ABCD$ има размери $AB = 4$ и $BC = 3$. Топката Q се намира на борда AB и след три последователни рикошета от BC , CD и DA се връща в първоначалното си положение. Колко е дълга траекторията, описана от Q ?

- А) 10 Б) 12 В) $5\sqrt{2}$ Г) $7\sqrt{2}$
Д) не е еднозначно определена

28. За сектора на чертежка е дадено $AB = 6$, $OA = 5$. На колко е равен радиусът на вписаната в сектора окръжност?

- А) $\frac{45}{32}$ Б) $\frac{25}{16}$ В) $\frac{15}{8}$ Г) $\frac{5}{2}$
Д) никое от тези



29. Дадени са следните равенства между едноцифрени числа, написани на тагалог (пилипино, филипински език):

$$\text{dalawa} + \text{tatlo} = \text{lima}$$

$$\text{tatlo} + \text{lima} = \text{walo}$$

$$\text{dalawa} + \text{lima} = \text{pito}$$

От петте споменати числа само едно не е просто. Кое от следните числа, записани на тагалог, е равно на сбора $\text{pito} + \text{walo}$?

- А) labinsiyam Б) labindalawa В) labintatlo
Г) labinlima Д) labimpito

(Тагалог използва познатата ни десетична бройна система за образуване на двуцифрените числа.)

30. При въвеждането на кои от началните данни

- A) 31 и 2015 Б) $\text{Sqrt}[54]$ и $\text{Sqrt}[24]$ В) $\text{Sqrt}[10]$ и $\text{Sqrt}[6]$
- Г) $\text{Sqrt}[27]$ и $\text{Sqrt}[12]$ Д) $\text{Sqrt}[50]$ и $\text{Sqrt}[8]$

даденият по-долу фрагмент от програма ще отпечата числото 2015?

въведи a_1 ;

въведи a_2 ;

$n := 2$;

докато $n < 2015$ и $a_n > 0$ повторяй

{ $n := n + 1$;
 $a_n := |a_{n-1} - a_{n-2}|$ }

отпечатай n .

(Командата $\text{Sqrt}[]$ изчислява квадратния корен на числото в скобите; команда $| |$ е обичайната абсолютна стойност; приемаме, че изчисленията се извършват точно – без закръгление.)

Драги ученици,

Двадесет и четвъртото издание на Есенния турнир **Черноризец Храбър** се провежда в навечерието на светъл празник – **Деня на народните будители**. Във времена на съмнителна ценостна система делото на народните будители е оставало морален ориентир за достоен житейски път. Вашите занимания с математика и информатика са доказателство за вярната посока, която сте избрали за реализацията си в професионален план, а математическото мислене, което формирате, ще ви гарантира независимост на духа и ясни мирогледни координати.

Желая ви успешно представяне на Турнира!



Доц. д-р Борислав Лазаров

Национален координатор на Турнира