

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Двадесет и четвърти турнир
Черноризец Храбър
31 октомври 2015 г.

Инструкция (11–12 клас)

1. Време за работа 90 минути. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.

2. Към всяка задача са дадени 5 възможности за отговор. В бланката за отговори срещу номера на всяка задача напишете верния според вас, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.

3. Попълвайте бланката ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате съответното поле, т.е да оставите полето срещу номера на задачата празно.

Забележка. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описаната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непопълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов и Йордан Табов.

Темата е съставена от Борислав Лазаров.

Двадесет и четвърти турнир „Черноризец Храбър“

Състезателна тема за 11–12 клас

1. $\frac{1}{20 + \frac{1}{5}} =$
A) $\frac{5}{101}$ Б) $\frac{5}{201}$ В) 0,2015 Г) 2,015 Д) никое от тези
2. Колко от членовете на безкрайната аритметична прогресия $\{a_n\}$ с $a_1 = 20$ и $a_2 = 15$ са по-големи от 0?
А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) никое от тези
3. Корените на уравнението $x^2 - 20x + 15 = 0$ са $x_{1,2}$. На колко е равно $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$?
А) $\frac{74}{3}$ Б) $\frac{17}{10}$ В) $\frac{214}{15}$ Г) 2 Д) никое от тези
4. $\sin 2015^\circ =$
А) $\cos 55^\circ$ Б) $\cos 45^\circ$ В) $\cos 65^\circ$ Г) $\cos 35^\circ$
Д) никое от тези
5. Колко от членовете на безкрайната геометрична прогресия $\{a_n\}$ с $a_1 = 20$ и $a_2 = 15$ са по-големи от 10?
А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) никое от тези
6. Ако $\lg 3 = a$, то $\lg(20 \cdot 15) =$
А) $2a$ Б) $2 + a$ В) a^2 Г) 2^a Д) никое от тези
7. Ако квадратните уравнения $mx^2 + nx - 1 = 0$ и $x^2 + mx + n = 0$ са равносилни, то $m + n =$
А) 2 Б) 0 В) -2 Г) $1 - \sqrt{2}$ Д) никое от тези
8. $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} =$
А) 8 Б) $3 + \sqrt{2}$ В) 6 Г) $4 + 3\sqrt{2}$ Д) никое от тези

9. За коя стойност на параметъра k правата с уравнение $y = kx$ минава през пресечната точка на правите с уравнения $y = 3x + 1$ и $y = 5x - 1$?

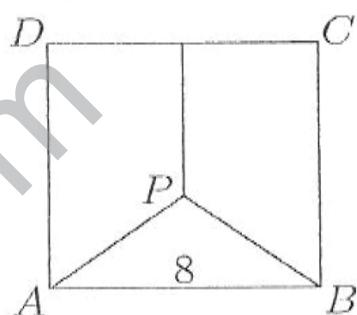
- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) никое от тези

10. Функцията $f(x)$ удовлетворява равенството $2f(x) - f(1-x) = 6x - 1$ за всяко $x \in (-\infty; +\infty)$. Коя от точките лежи на графиката на тази функция?

- А) $A(0; -1)$ Б) $B(-1; 1)$ В) $C(1; 3)$ Г) $D(2; 2)$
Д) никое от тези

11. Дължината на страната на квадрата $ABCD$ е 8. Точката P е на равни разстояния от страната CD и от върховете A и B . На колко е равно PA ?

- А) 5 Б) $3\sqrt{2}$ В) $2\sqrt{3}$ Г) $2\sqrt{5}$
Д) никое от тези



12. За успоредника $ABCD$ е дадено $AB = 5$, $BC = 4$ и $AC = 6$. На колко е равно BD ?

- А) $\sqrt{46}$ Б) $\sqrt{41}$ В) $\sqrt{38}$ Г) $\sqrt{35}$ Д) никое от тези

13. Числата b и c се избират по случаен начин измежду елементите на множеството $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Каква е вероятността уравнението $x^2 + bx + c = 0$ да има реални корени?

- А) 0,24 Б) 0,32 В) 0,36 Г) 0,48 Д) никое от тези

14. Ако 5 и 13 са корени на уравнението $x^3 + ax^2 + bx - 2015 = 0$, то $a + b =$

- А) 672 Б) 574 В) -480 Г) 623 Д) никое от тези

15. Колко са точките с целочислени координати $(x; y)$, за които $|x + y| \leq 1$ и $|2x - 3y| \leq 3$?

- А) 3 Б) 5 В) 7 Г) 9 Д) никое от тези

16. На чертежа $\angle AOB = 120^\circ$. Построени са полуокръжности с диаметри AO и BO . Ако лицето на сегмента върху хордата AB е 1, то на колко е равно лицето на частта от сектора AOB , външна за двете полуокръжности?

- А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{1}{3}$ Д) никое от тези

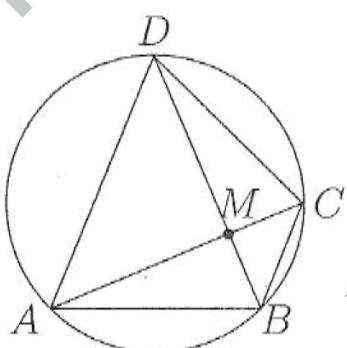
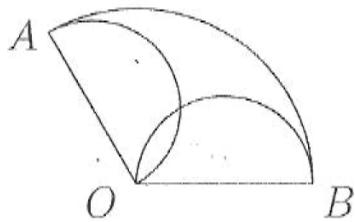
17. Нека $x_{1,2}$ са корените на параметричното уравнение $x^2 - (t - \frac{1}{t})x - 1 = 0$. На колко е равна най-малката стойност на функцията

$$f(t) = |x_1 - x_2|, t \in (0; +\infty)$$

- А) 1 Б) $\sqrt{2}$ В) $\sqrt{3}$ Г) 2 Д) $\sqrt{5}$

18. В окръжност с радиус 1 се вписва четириъгълник $ABCD$, при това точките A и B са неподвижни, C и D се движат по окръжността, като $AB = CD = \sqrt{2}$. Геометричното място на пресечната точка M на диагоналиите е линия. На колко е равна дължината на тази линия?

- А) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ Б) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ В) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ Г) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$ Д) никое от тези



19. Хвърлят се два различни правилни зара. Всеки зара има една страна с 1 точка, две различно оцветени страни с по 2 точки и три различно оцветени страни с по 3 точки. Кой е най-вероятният сбор точки при едно хвърляне на двета зара?

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) 6

20. Колко от първите 20 члена на редицата

$c_1 = \cos 1^\circ, c_2 = \cos 10^\circ, c_3 = \cos 100^\circ, c_4 = \cos 1000^\circ, \dots$
са отрицателни?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 10

21. Кое от изброените твърдения е логическо следствие на твърдението „Това, което не ни убива, ни прави по-силни.“?

- А) Това, което не ни прави по-силни, ни убива.
- Б) Това, което ни убива, не ни прави по-силни.
- В) Това, което ни прави по-силни, не ни убива.
- Г) Това, което ни прави по-силни, е гимнастиката.
- Д) никое от тези

22. Най-големият делител на естественото число n , различен от n , е с 2015 по-голям от квадрата на най-малкия естествен делител на n , различен от 1. Определете сума от цифрите на n .

- А) 15 Б) 16 В) 17 Г) 18 Д) никое от тези

23. Какъв е максималният брой прави, определени от двойки върхове на правилен 2015-ъгълик, всеки две от които се пресичат?

- А) 2014 Б) 2029105 В) 2015 Г) 2025075
- Д) никое от тези

24. В единия връх на куб стои мравка. Всяка минута тя пропълзява по ръб до съседен връх. След 9 минути мравката била в най-далечния връх на куба. По колко различни начина може да се е движила?

- А) 5226 Б) 4920 В) 3024 Г) 504 Д) никое от тези

25. Редицата $\{a_n\}$ е зададена с условията

$$a_0 = 8, \quad a_1 = 21, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Коя е цифрата на единиците на a_{2015} ?

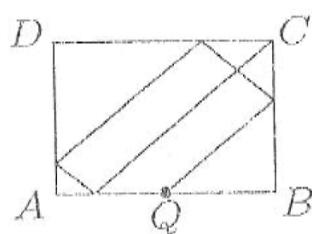
- А) 1 Б) 3 В) 7 Г) 9 Д) никое от тези

26. Основата на права призма е успоредникът $ABCD$. Равнина пресича ръбовете AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 съответно в точките A_2, B_2, C_2, D_2 . Ако $AA_2 = 9, BB_2 = 7, CC_2 = 13$, то на колко е равна DD_2 ?

- А) 11 Б) $4\sqrt{2}$ В) $4\sqrt{5}$ Г) 15 Д) никое от тези

27. Правоъгълният билиард $ABCD$ има размери $AB = 4$ и $BC = 3$. Топката Q се намира в средата на борда AB и след четири последователни рикошета от BC , CD , DA и AB попада в C . Колко е дълга траекторията, описана от Q ?

- А) $\sqrt{145}$ Б) $\sqrt{113}$ В) $\sqrt{120}$ Г) $\sqrt{181}$
 Д) никое от тези



28. Кривата на Кох е граничната фигура при итерационната процедура, илюстрирана на чертежа: на всяка итерация отсечка се заменя с елемент, подобен на началната фигура. Фракталната размерност D на кривата се определя от уравнението $N = \varepsilon^{-D}$, където N е броят на отсечките в елемента, заменяни отсечка при итерационната процедура, ε е кофициентът на подобие, изобразявашо стара отсечка в нова. На колко е равна D ?

- А) $-\frac{\lg 3}{\lg 4}$ Б) $-\frac{\lg 4}{\lg 3}$ В) $\frac{\lg 3}{\lg 4}$ Г) $\frac{\lg 4}{\lg 3}$ Д) никое от тези



29. Дадени са следните равенства между едноцифрени числа, написани на тагалог (пилипино, филипински език):
 dalawa + tatlo = lima
 tatlo + lima = walo
 dalawa + lima = pito

От петте споменати числа само едно не е просто. Кое от следните числа, записани на тагалог, е равно на сума pito + walo?

- А) labindalawa Б) labintatlo В) labinsiyam
 Г) labimpito Д) labinlima

(Тагалог използва позицата ни десетична бройна система за образуване на двуцифрените числа.)

30. При въвеждането на кои от началините дани

- А) 31 и 2015 Б) $\text{Sqrt}[54]$ и $\text{Sqrt}[24]$ В) $\text{Sqrt}[27]$ и $\text{Sqrt}[12]$
Г) $\text{Sqrt}[10]$ и $\text{Sqrt}[6]$ Д) $\text{Sqrt}[50]$ и $\text{Sqrt}[8]$

даденият по-долу фрагмент от програма ще отпечата числото 2015?

въведи a_1 ;

въведи a_2 ;

$n := 2$;

докато $n < 2015$ и $a_n > 0$ повтаряй

{ $n := n + 1$;

$a_n := |a_{n-1} - a_{n-2}|$ }

отпечатай n .

(Командата $\text{Sqrt}[]$ изчислява квадратният корен на числото в скобите; команда $| |$ е обичайната абсолютна стойност; приемаме, че изчисленията се извършват точно – без закръгляне.)

Драги ученици,

Двадесет и четвъртото издание на Есенния турнир **Черноризец Храбър** се провежда в навечерието на светъл празник – Деня на народните будители. Във времена на съмнителна ценостна система делото на народните будители е оставало морален ориентир за достоен житейски път. Вашите занимания с математика и информатика са доказателство за вярната посока, която сте избрали за реализацията си в професионален план, а математическото мислене, което формирате, ще ви гарантира независимост на духа и ясни мирогледни координати.

Желая ви успешно представяне на Турнира!



Доц. д-р Борислав Лазаров

Национален координатор на Турнира