БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Двадесет и втори турнир **Черноризец Храбър**
1 ноември 2013 г.

Инструкция (9–10 клас)

1. Време за работа 90 минути. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.

2. Към всяка задача са дадени 5 възможности за отговор. В бланката за отговори срещу номера на всяка задача напишете верния според вас, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.

3. Попълвайте бланката ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате съответното поле, т.е да оставите полето срещу номера на задачата празно.

Забележка. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описаната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непопълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов.
Темата е съставена от Борислав Лазаров.

Двадесет и втори турнир „Черноризец Храбър“

Състезателна тема за 9–10 клас

1. $2013 - 2012 + 2011 - 2010 + \cdots + 3 - 2 + 1 =$

А) 1005 Б) 1006 В) 1007 Г) 1008 Д) никое от тези

2. За коя от стойностите на параметъра p уравнението $x^2 + 2013x + p = 0$ има корени с различни знаци?

А) -2013 Б) 2013 В) 2012 Г) 2014 Д) 0

3. Група екскурзианти пътували с влак. Учениците ползвали 75% намаление, пенсионерите – 50%, а екскурзиантите с редовни билети били два пъти повече от учениците и четири пъти повече от пенсионерите. Общата сума за пътуването била колкото 30 редовни билета. Колко са били екскурзиантите?

А) 30 Б) 36 В) 40 Г) 42 Д) никое от тези

4. Ако за всяко реално x имаме $f(x-1) = x^2 - 3x + 1$, то:

А) $f(x) = x^2 - x - 1$ Б) $f(x) = x^2 - 3x - 1$
В) $f(x) = x^2 + x + 1$ Г) $f(x) = x^2 + 3x + 1$
Д) никое от тези

5. Колко са трицифрените триъгълни числа? (Триъгълното число t_n изразява броя на точките, подредени в равностранен триъгълник със страна n; $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + n$.)

А) 29 Б) 30 В) 31 Г) 32 Д) никое от тези

6. Кое е най-голямото двуцифрено число, което не може да се представи като сбор на две прости числа?

А) 99 Б) 98 В) 97 Г) 96 Д) 95

7. Ако t е броят на трицифрените числа, всички цифри на които са различни прости числа, а c е броят на четирицифрените числа, всички цифри на които са различни прости числа, то колко е $t : c$?

А) $\frac{1}{5}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $\frac{1}{2}$ Д) 1

8. За страните на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са в сила отношенията $AB : BC : CD : DA = 1 : 2 : 4 : 3$. Окръжностите, вписани в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, допират BD в точките M и N. На колко е равно отношението $MN : BD$?

А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{5}$ В) $\frac{1}{4}$ Г) $\frac{1}{3}$ Д) никое от тези

9. Ако $x + 2y,\ y + 2z,\ z + 2x$ са прости числа, чието произведение е 2013, то на колко е равна сумата $x + y + z$?

А) 37 Б) 29 В) 25 Г) 19 Д) 16

10. От десетичните цифри $x > y > z > 0$ са образувани всевъзможните трицифрени числа с различни цифри, след което е пресметнат сборът s на тези числа. Колко са множествата $\{x,\ y,\ z\}$, за които $s < 2013$?

А) 7 Б) 6 В) 5 Г) 5 Д) никое от тези

11. Околните стени на една правилна четириъгълна пирамида са равностранни триъгълници със страни 10 м и са облицовани с мраморни плочи, които също имат форма на равностранни триъгълници със страни 40 см. Колко плочи са използвани за облицовката?

А) 400 Б) 1000 В) 2500 Г) 4000 Д) никое от тези

12. За естествените числа n с $P(n)$ означаваме произведението от десетичните цифри на n (за едноцифрени n полагаме $P(n) = n$). Колко са числата $m < 25$, за които $P(P(m^2)) = 0$?

А) 2 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) 7

13. В отборно състезание по математика всеки ученик от отбора участвал в решаването на две от задачите, всяка задача е решавана от четирима ученици и за коя да е двойка задачи от темата само един ученик е решавал и двете задачи. Колко ученици са били в отбора?

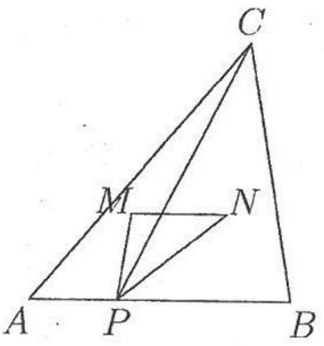
А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9 Д) никое от тези

14. Всяка от три окръжности с радиус 1 се допира външно до другите две. На колко е равен радиусът на четвърта окръжност, която се допира външно до трите еднакви окръжности?

А) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ Б) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$ В) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ Г) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$

Д) никое от тези

15. Точката P е от страната AB на $\triangle ABC$, а M и N са медицентровете на $\triangle APC$ и $\triangle BPC$. Каква част от лицето на $\triangle ABC$ е лицето на $\triangle PNM$?



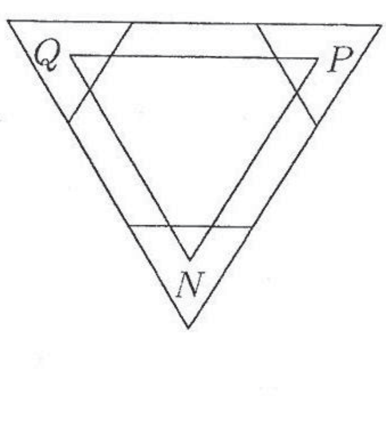
А) $\dfrac{1}{9}$ Б) $\dfrac{1}{6}$ В) $\dfrac{3}{8}$ Г) $\dfrac{5}{18}$

Д) никое от тези

16. На колко е равен остатъкът от делението на 2013^{2013} на 13?

А) 5 Б) 8 В) 1 Г) 2 Д) 11

17. Върху 3 от страните на правилен шестоъгълник външно за шестоъгълника са построени равностранни триъгълници с центрове N, P, Q, както е показано на чертежа. Каква част от лицето на шестоъгълника е лицето на $\triangle NPQ$?



А) $\frac{2}{3}$ Б) $\frac{4}{9}$ В) $\frac{3}{4}$ Г) $\frac{9}{16}$ Д) никое от тези

18. На колко е равно лицето на фигурата, състояща се от точките с координати $(x; y)$, за които $1 \leq |x| + |y| \leq 2$?

А) 1 Б) 3 В) 4 Г) 6 Д) 7

19. Ще казваме, че един диагонал на изпъкнал n-ъгълник е *голям*, ако той не разделя дадения многоъгълник на триъгълник и друг многоъгълник. Броят на всички големи диагонали на един изпъкнал n-ъгълник е 2013. На колко е равно числото n?

А) 66 Б) 61 В) 65 Г) 67 Д) никое от тези

20. По колко начина може делегация от 11 души да се превози с четири автомобила, които външно са неразличими, ако в един автомобил не могат да се возят повече от трима души?

А) 9240 Б) 15400 В) 30800 Г) 46200
Д) никое от тези

21. Колко най-малко различни естествени числа, ненадвишаващи 100, трябва да се поръчат, за да е сигурно, че в доставката ще има поне две взаимно прости?

А) 10 Б) 11 В) 50 Г) 90 Д) никое от тези

22. Редицата $a_n = \overline{b_n c_n}$, $b_n, c_n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ е определена с равенствата $a_1 = 16$, $a_{n+1} = b_n + c_n^2$ за $n \in \mathbf{N}$. На колко е равно a_{2013}?

А) 9 Б) 16 В) 37 Г) 52 Д) 81

23. Колко са реалните решения на системата
$\left| \begin{array}{l} x^2 - yz = -2 \\ y + z = 2\sqrt{2} \end{array} \right.$?

А) 4 Б) 3 В) 2 Г) 1 Д) няма решения

24. Всяко от десет деца донесло по един шоколад. Шест от децата изяли собствените си шоколади, а всяко от останалите – по един от чуждите шоколади. По колко начина може да е станало това?

А) 210 Б) 420 В) 840 Г) 1890 Д) 5040

25. Колко от числата 1, 2, 3,..., 2013 имат кратни от вида 444...44?

А) 1208 Б) 1410 В) 1511 Г) 1612 Д) никое от тези

26. Тортата Каприча е приготвена от 5 големи яйца (72 ккал/бр.), 200 г брашно (2400 ккал/кг), 150 г захар (3600 ккал/кг), 150 г сметана (3000 ккал/кг). Тортата Буламача е приготвена от 3 малки яйца (60 ккал/бр.), 300 г трици (1500 ккал/кг), 180 г подсладител (500 ккал/кг), 150 г масло (7200 ккал/кг). Г-жа Фета обикновено яде по 1/10 торта Каприча, но днес решила да си вземе 1/10 Буламача. Приблизително колко килокалории ще си спести Фета днес само от торта?

А) около 80 Б) около 40 В) около 20 Г) около 60
Д) почти нищо няма да спести

27. В следните равенства, написани на езика *Солресол*, думите означават цифри:

редодо + ремими + солдо + рефафа = ресиси
ремими × рефафа = ресиси

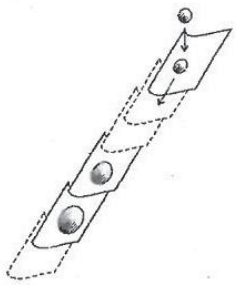
Намерете сбора ремими + рефафа + ресиси.

А) 14 Б) 13 В) 12 Г) 11 Д) 10

28. Колко са трицифрените числа $\overline{abc}$, за които $a \cdot b \cdot c = 2^4 3^3$?

А) 3 Б) 6 В) 8 Г) 9 Д) 12

29. Първоначално керемидите на един достатъчно голям навес са сухи. От капчук започват да падат последователно водни капки върху една най-горна керемида. Всяка капка, търкулвайки се надолу, спира на първата керемида без капка, до която достигне. Ако пък стигне до керемида, на която вече има капка, тя се слива с нея и така получената по-голяма капка се търкулва на по-долната керемида (тя от своя страна спира, ако керемидата е без капка или, ако на керемидата има капка, се слива с нея, а така получената още по-голяма капка се търкулва на следващата по-надолу керемида) и т.н. На колко керемиди ще има капки след като падне и се изтъркаля 2013-ата капка?



А) 8 Б) 9 В) 10 Г) 11 Д) никое от тези

30. Колко реда ще отпечата процедурата

```
Кула(n: цяло; ot: буква, prez: буква, do: буква)
   ако n>0 то
     {Кула(n-1, ot, do, prez);
     ОтпечатайНовРед('премести диск от', ot, 'на', do);
     Кула(n-1, prez, ot, do)}
```

при извикването на Кула(10, А, Б, В) ?

А) под 10 Б) между 10 и 100 В) между 101 и 1000
Г) между 1001 и 10000 Д) над 10000