

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Двадесет и втори турнир **Черноризец Храбър**
1 януари 2013 г.

Инструкция (11–12 клас)

1. Време за работа 90 минути. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.

2. Към всяка задача са дадени 5 възможности за отговор. В бланката за отговори срещу номера на всяка задача пишете верния според вас, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.

3. Попълвайте бланката ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате съответното поле, т.е. да оставите полето срещу номера на задачата празно.

Забележка. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описваната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов, Иван Тонов и Йордан Табов.

Темата е съставена от Борислав Лазаров.

Двадесет и втори турнир „Черноризец Храбър“

Състезателна тема за 11–12 клас

1. $\lg 2013^2 - 2 \lg 2013 =$

- А) 0 Б) 1 В) 10 Г) 100 Д) 1000

2. Кое от числата

- А) 2013 Б) 2014 В) 2015 Г) 2016 Д) 2017

е член на аритметичната прогресия с първи член 3 и разлика 671?

3. Ако за всяко реално x имаме $f(x-1) = x^2 - 3x + 1$, то:

- А) $f(x) = x^2 - 3x - 1$ Б) $f(x) = x^2 - x - 1$
В) $f(x) = x^2 + x + 1$ Г) $f(x) = x^2 + 3x + 1$
Д) никое от тези

4. Колко корена има уравнението $\sin^2 x + 2 \cos x - 2 = 0$ в интервала $[0; \pi]$?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4

5. Колко са трицифрените триъгълни числа? (Триъгълното число t_n изразява броя на точките, подредени в равностранен триъгълник със страна n ; $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + n$.)

- А) 29 Б) 31 В) 34 Г) 37 Д) никое от тези

6. Ако $f(x) = \sin^2 x + 2 \cos x$, $x \in [0; \pi]$, то кои са най-малката и най-голямата стойност на $f(x)$?

- А) $f_{\min} = -2$, $f_{\max} = 2$ Б) $f_{\min} = -1$, $f_{\max} = 1$
В) $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 2$ Г) $f_{\min} = -2$, $f_{\max} = 1$
Д) никое от тези

7. Кое е най-голямото двуцифрено число, което не може да се представи като сбор на две прости числа?

- А) 99 Б) 98 В) 97 Г) 96 Д) 95

8. По случаен начин се избира трицифрено число. Каква е вероятността всички цифри на избраното число да са различни прости числа?

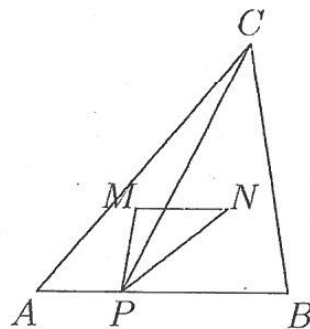
- А) $\frac{1}{15}$ Б) $\frac{8}{333}$ В) $\frac{4}{165}$ Г) $\frac{2}{75}$ Д) $\frac{1}{2}$

9. За страните на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са в сила отношенията $AB : BC : CD : DA = 1 : 2 : 4 : 3$. Окръжностите, вписани в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, допират BD в точките M и N . На колко е равно отношението $MN : BD$?

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{5}$ В) $\frac{1}{4}$ Г) $\frac{1}{3}$ Д) никое от тези

10. Точката P е от страната AB на $\triangle ABC$, а M и N са медицентровете на $\triangle APC$ и $\triangle BPC$. Каква част от лицето на $\triangle ABC$ е лицето на $\triangle PNM$?

- А) $\frac{1}{9}$ Б) $\frac{1}{6}$ В) $\frac{3}{8}$ Г) $\frac{5}{18}$
Д) никое от тези



11. На колко е равно лицето на фигурата, състояща се от точките с координати $(x; y)$, за които $1 \leq |x| + |y| \leq 2$?

- А) 1 Б) 3 В) 4 Г) 6 Д) 7

12. На колко е равен коефициентът пред x^{-3} след разкриване на скобите и извършване на привеждане в израза $(x^2 + \frac{1}{x})^6(1+x)^3$?

- А) 1 Б) 3 В) 6 Г) 7
Д) никое от тези

13. Кои са стойностите на параметъра m , за които решенията на неравенството $4(mx)^2 \leq 4x^4 + 1$ са $x \in (-\infty; +\infty)$?

- А) $m \in (-\infty; 0]$ Б) $m \in (-2; 2)$ В) $m \in [0; +\infty)$
 Г) $m \in [-1; 1]$ Д) никое от тези

14. На колко е равен остатъкът от делението на 2013^{2013} на 13?

- А) 5 Б) 8 В) 1 Г) 2 Д) 11

15. Двата диагонала на делтоид имат дължина 4 и две от страните му са $\sqrt{5}$. На колко е равна всяка от другите две страни?

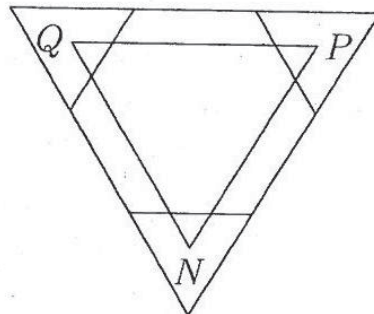
- А) $\sqrt{10}$ Б) $\sqrt{8}$ В) $\sqrt{14}$ Г) $\sqrt{12}$ Д) никое от тези

16. Кое е най-малкото число, което, записано в бройна система с основа 4, има сбор от цифрите 2013_4 ?

- А) $2^{90} - 1$ Б) $3^{45} - 1$ В) $4^{503} - 1$ Г) 2013^4
 Д) никое от тези

17. Върху 3 от страните на правилен шестоъгълник външно за шестоъгълника са построени равностранни триъгълници с центрове N , P , Q , както е показано на чертежа. Каква част от лицето на шестоъгълника е лицето на $\triangle NPQ$?

- А) $\frac{4}{9}$ Б) $\frac{3}{4}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{9}{16}$ Д) никое от тези



18. Всяка от три окръжности с радиус 1 се допира външно до другите две. На колко е равен радиусът на четвърта окръжност, която се допира външно до трите еднакви окръжности?

- А) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ Б) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ В) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ Г) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$
 Д) никое от тези

19. На бал отиват 10 двойки абитуриенти. След бала всеки младеш изпратил девойка до дома ѝ. Каква е вероятността за точно пет от младежите да е вярно: всеки е изпратил девойката, с която е отишъл на бала?

- А) по-голяма от 0,5 Б) между 0,1 и 0,5
В) между 0,01 и 0,05 Г) между 0,001 и 0,005
Д) под 0,001

20. Даден е правоъгълник $ABCD$ с $AB = 10$ и $BC = 5$. X е променлива точка от страната CD . Каква е най-малката възможна стойност на израза $y = 3AX^2 + BX^2$?

- А) 120 Б) 175 В) 144 Г) 150 Д) никое от тези

21. Колко са решенията на системата $\begin{cases} y = \sin x \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) никое от тези

22. Колко от числата 1, 2, 3, ..., 2013 имат кратни от вида 888...88 ?

- А) 1208 Б) 1410 В) 1511 Г) 1612 Д) никое от тези

23. Колко са реалните решения на системата $\begin{cases} x^2 - yz = -2 \\ y + z = 2\sqrt{2} \end{cases}$?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 4 Д) безбройно много

24. В следните равенства, написани на езика *Солресол*, думите означават цифри:

редодо + ремими + солдо + рефафа = ресиси

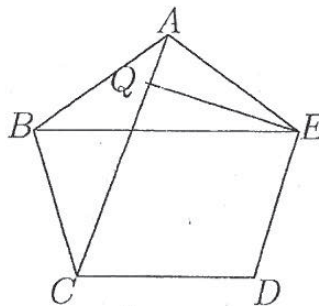
ремими \times рефафа = ресиси

Намерете сбора ремими + рефафа + ресиси.

- А) 10 Б) 11 В) 12 Г) 13 Д) 14

25. Даден е правилен петогълник $ABCDE$. Ъглополовящата на $\angle BEA$ пресича AC в точката Q . На колко е равно $CQ : AQ$?

- А) $2 + \sqrt{5}$ Б) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ В) $1 + \sqrt{5}$
Г) 5 Д) никое от тези

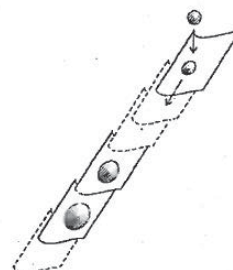


26. Колко са трицифрените числа \overline{abc} , за които $abc = 2^4 3^3$?

- А) 12 Б) 9 В) 8 Г) 6 Д) 3

27. Първоначално керемидите на един достатъчно голям навес са сухи. От капчук започват да падат последователно водни капки върху една най-горна керемида. Всяка капка, търкулвайки се надолу, спира на първата керемида без капка, до която достигне.

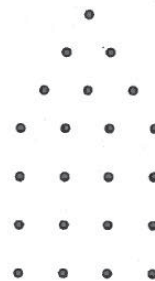
Ако пък стигне до керемида, на която вече има капка, тя се слива с нея и така получената по-голяма капка се търкулва на по-долната керемида (тя от своя страна спира, ако керемидата е без капка или, ако на керемидата има капка, се слива с нея, а така получената още по-голяма капка се търкулва на следващата по-надолу керемида) и т.н. На колко керемиди ще има капки след като падне и се изтъркаля 2013-ата капка?



- А) 11 Б) 10 В) 9 Г) 8 Д) никое от тези

28. Петогълното число P_n е броят на точките, които могат да се подредят в квадрат $n \times n$, над който е оформен триъгълник с основа горната страна на квадрата. На фигурата е илюстрирано P_4 . На колко е равно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n^2}$?

- А) $\frac{5}{4}$ Б) $\frac{4}{3}$ В) 2 Г) $\frac{6}{5}$ Д) никое от тези



29. Колко реда ще отпечата процедурата

Кула(n : цяло; $от$: буква, $през$: буква, $до$: буква)

ако $n > 0$ то

{Кула($n-1$, $от$, $до$, $през$);

ОтпечатайНовРед('премести диск от', $от$, 'на', $до$);

Кула($n-1$, $през$, $от$, $до$)}

при извикването на Кула(10, А, Б, В) ?

А) под 10 Б) между 10 и 100 В) между 101 и 1000

Г) между 1001 и 10000 Д) над 10000

30. Околните стени на единичния куб в правоъгълна координатна система са огледални. Лъч излиза от точката (0, 5; 0; 0) и се отразява за първи път в точката (1; 0, 5; 0, 25). В коя точка ще бъде лъчът по време на четвъртата си „среща“ с куба? („излизането“ не се брои.)

А) (0, 5; 1; 1) Б) (0, 5; 0; 1) В) (0, 5; 0; 0, 75) Г) (0, 5; 1; 0)

Д) никое от тези