МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - СЛИВЕН

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ – 15.12.2012 ГОД. – 12 КЛАС

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 1.

А) Неравенството е еквивалентно на системата $\left|\begin{array}{l}\dfrac{x^2-2x}{x+1}<1\\ \dfrac{x^2-2x}{x+1}>-1\end{array}\right. \Rightarrow$

$x\in\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ **2 точки**

Б) Полагаме $y=3^{\sqrt{x-2}}$ **1 точка**

За намиране на решението спрямо $y\in(0;3]\cup[9;+\infty)$ **1 точка**

За получаване на крайните решения $x\in[2;3]\cup[6;+\infty)$ **1 точка**

В) Последователно преобразуваме уравнението $\cos 2x+3\sin x=2\Leftrightarrow$
$1-2\sin^2 x+3\sin x-2=0\Leftrightarrow -2\sin^2 x+3\sin x-1=0$, където полагаме
$\sin x=y\Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{1}{2};1$

За решаване на основните тригонометрични уравнения $\sin x=\dfrac{1}{2};\sin x=1$

и получаване на корените $x_1=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi; x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi; x_3=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ **2 точки**

Задача 2.

От това, че F(x) не е дефинирана при $x = 2 \Rightarrow 2p + q = 0$, т.е. $q = -2p$ **1 точка**

F(x)=$\dfrac{x^2+bx+c}{p(x-2)}$

Най-малкото цяло решение на даденото уравнение е $x=3$

$\Rightarrow p=\dfrac{1}{3}.3=1$ **1 точка**

$\Rightarrow$ F(x)=$\dfrac{x^2+bx+c}{x-2}$

Ако $\lim\limits_{x\to 2}F(x)=1$ и x=2 не е корен на уравнението $x^2+bx+c=0$, то

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+bx+c)=k\neq 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}F(x)$ ще е равно на $+\infty$ или $-\infty$

$\Rightarrow$x=2 е корен на уравнението $x^2+bx+c=0\Rightarrow 4+2b+c=0\Rightarrow c=-4-2b$

F(x)=$\dfrac{(x-2)(x+2+b)}{x-2}=x+2+b$ **2 точки**

$\lim\limits_{x\to 2}F(x)=1\Rightarrow b=-3\Rightarrow c=2$ **2 точки**

F(x)=x-1, $x \neq 2$

За начертана графика **1 точка**

Задача 3.

А) При a=6 получаваме неравенството: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6.6^x - 36^x) \geq -2 \Rightarrow 6.6^x - 6^{2x} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$

1 точка

Полагаме $y = 6^x \Rightarrow y^2 - 6y + 5 \geq 0 \Rightarrow y \in (0;1] \cup [5;6)$ (съобразено с ДС за y)

Окончателно $x \in (-\infty;0] \cup [\log_6 5;1)$ **1 точка**

Б) Нека $m(a) = \min f(x) = \min\left(\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(a.6^x - 36^x)\right)$. Тъй като основата на логаритъма е по-малка от 1, то $f(x)$ е намаляваща в множеството от ДС и ще има най-малка стойност когато функцията $g(x)=a.6^x - 36^x$ има максимална стойност. **1 точка**

Да разгледаме функцията $g(t)=a.t-t^2$. Тя е растяща за $t < \frac{a}{2}$ и намаляваща при $t > \frac{a}{2} \Rightarrow$ при

$t = \frac{a}{2}$, $g(t)=a.t-t^2$ има максимум и $g_{\max}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ **2 точки**

$\Rightarrow m_{\min}\left(\frac{a}{2}\right) = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{a^2}{4}$.

$$\lim_{a\to\infty}\left[\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{a^2}{4} + 4\log_5(a+1)\right] = \lim_{a\to\infty}\left[-2\log_5\frac{a^2}{4} + \log_5(a+1)^4\right] = \lim_{a\to\infty}\left[\log_5\left(\frac{4}{a^2}\right)^2.(a+1)^4\right] =$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(\frac{a+1}{a}\right)^4\right] = \lim_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(1+\frac{1}{a}\right)^4\right]$$ и тъй като $\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{a\to\infty}\left[\log_5 16.\left(1+\frac{1}{a}\right)^4\right] = \log_5 16$$ **2 точки**

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.