РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
Министерство на образованието, младежта и науката
Регионален инспекторат по образованието – Ямбол

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

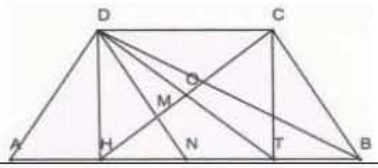
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 15.12.2012 ГОД.

Критерии за IX клас:

Задача 1:

А) при $x \neq -1$ и $x \neq -3$ уравнението е еквивалентно на $x^2-3x-4=0$	2 точки
Корените му са – 1 и 4 , като – 1 не е допустима стойност и не е решение. Тогава уравнението има единствен корен, равен на 4.	1 точка
Б) уравнението е еквивалентно на $\frac{2a^2+3a-5x}{(x+1)(x-2a+1)}=2-\frac{3x+a+2}{x+1}$	1 точка
При $x \neq -1$ и $x \neq 2a-1$ се получава уравнението $x^2-(4+a)x+4a=0$, със корени 4 и a	1 точка
Първоначалното уравнение има единствен реален корен, ако: a=4 или a= -1 или a=2a-1 или 4=2a-1, т.е ако a=4, a=-1, a=2,5 и a=1	2 точки (за всяка ст-ст - по 0,5т)

Задача 2:

 а) $DM \cap AB=N$, От т.M – медицентър на $\triangle ABD$ $\Rightarrow DN$ е медиана в $\triangle ABD$ и $AN=BN$ **(1)**, $DM:MN$=2:1 **(2)** $AB \parallel CD$; $AD=CB$; $DH \perp AB$, $CT \perp AB$ $\Rightarrow \triangle AHD \cong \triangle BTC$ (II пр.) $\Rightarrow AH=BT$ **(3)**	1 точка
От (1) и (3) $\Rightarrow HN=TN \Rightarrow DN$ - медиана в $\triangle HDT$ **(4)**	1 точка
От (2), (4) и $M \in DN \Rightarrow M$ е медицентър на $\triangle HDT$ **(5)**	1 точка

$y(5)=-5$ и $g(5)=-4.5+d=-5$, $d=15$	0,5 точки
Следователно $g(x)=-4x+15$	0,5 точки

Б) От $AB \parallel CD$; $DH \perp AB$, $CT \perp AB$ $\Rightarrow HTDC$ е правоъгълник $\Rightarrow HC \cap TD$=O - среда на HC и TD $\Rightarrow HO$ е медиана в $\triangle HDT$ **(6)**	1 точка
От (5) и (6) $\Rightarrow M \in HO$, $O \in HC$, $M \in HC \Rightarrow C$, M и H лежат на една права	1 точка
От (5) и (6) $\Rightarrow HM:MO$=2:1, но $HO=CO \Rightarrow \frac{CM}{HM}=\frac{CO+OM}{HM}=\frac{HO+OM}{HM}=\frac{4}{2}$ $\Rightarrow CM:HM$=2:1	2 точки

Задача 3:

Да допуснем, че уравнението има решение в цели числа. $147z^2$ и $77\ldots7_{2012}$ се делят на 7. Следователно x^2+2y^2 се дели на 7	1 точка
Ако x и y не се делят на 7, т.е. са от вида $7\kappa \pm 1$; $7\kappa \pm 2$; $7\kappa \pm 3$, то x^2 има остатък 1,4 или 2 при деление на 7, а $2y^2$ – остатък 2,1 или 4. Тогава x^2+2y^2 не се дели на 7	2 точки
Следователно x и y се делят на 7. Заместваме в уравнението $x=7l$ и $y=7n$ и получаваме $49l^2+98n^2+147z^2=77\ldots7_{2012}$, $7l^2+14n^2+21z^2=11\ldots1_{2012}$	2 точки
Числото 111111 се дели на 7, а 2012=6.335+2. Тогава числото $11\ldots1_{2012}$ не се дели на 7 и уравнението няма решение в множеството на целите числа.	2 точки