РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
Министерство на образованието, младежта и науката
Регионален инспекторат по образованието – Ямбол

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

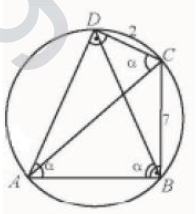
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 15.12.2012 ГОД.

Критерии за XII клас:

Задача 1 :

А) за намерена производна $f'(x)=\dfrac{1-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	0,5 точки
Интервал на растене и намаляване и локален екстремум : при $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ функцията расте, при $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ – намалява, а при $x=\dfrac{1}{2}$ има локален максимум, равен на $\sqrt{5}$	1 точки
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$	1 точка
Множеството от функционалните стойности: $f(x)\in(-1;\sqrt{5}\,]$	0,5 точки
Б) получено уравнението $f(x)=k$, където κ е цяло число.	0,5 точки
Направен извода, че уравнението има решение, ако $k\in(-1;\sqrt{5}\,]$,т.е ако κ=0, κ=1	0,5 точки
или κ=2	
Намерени корените на уравнението в трите случаи При $k=0\Rightarrow x_1=-2$, $k=1\Rightarrow x_2=-\dfrac{3}{4}$, $k=2\Rightarrow x_3=0, x_4=\dfrac{4}{3}$	3 точки

Задача 2:

За намерено $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=90^0$ 	1 точка
Въведено $\sphericalangle ABD=\sphericalangle BAD=\sphericalangle ACD=\alpha$, изразени ъглите на $\triangle BDC:\sphericalangle DBC=90^0-\alpha, \sphericalangle BDC=2\alpha-90^0$	1 точка
Приложена синусова теорема за $\triangle BDC$ $\dfrac{2}{\sin(90^0-\alpha)}=\dfrac{7}{\sin(2\alpha-90^0)}$	1 точка
$4\cos^2\alpha+7\cos\alpha-2=0$	1 точка
$\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$	1 точка
$AC=\dfrac{2}{\cos\alpha}=8$, $AD=2\sqrt{15}, AB=\sqrt{15}$	1,5 точки
$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}=2\sqrt{15}+\dfrac{7\sqrt{15}}{2}=\dfrac{11\sqrt{15}}{2}$	0,5 точки

Задача 3:

А) В $\triangle ABC_1: AB=a, BC_1=a\sqrt{2}, \sphericalangle ABC_1=90^0\Rightarrow AC_1=a\sqrt{3}$. Но BM е височина към хипотенузата $\Rightarrow AM.a\sqrt{3}=a^2\Rightarrow AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}AC_1$	1 точка
Аналогично от $\triangle ACC_1\Rightarrow C_1N=\dfrac{1}{3}AC_1$ Тогава $AM:MN:NC_1=1:1:1$	1 точка
Б) BM и AC_1 лежат в равнината (ABC_1D_1) , която пресича (ADD_1) в правата AD_1 . Но $BM\cap AD_1=E\Rightarrow BM\cap(ADD_1)=E$	1 точка
$\triangle AEM\sim\triangle C_1BM\Rightarrow\dfrac{AE}{BC_1}=\dfrac{AM}{MC_1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow E$ е средата на AD_1	1 точка
В равнината $(ACC_1A_1)-CN\cap C_1A_1=F\Rightarrow CN\cap(A_1B_1C_1)=F$ и аналогично е средата на A_1C_1	1 точка
EF е средна отсечка в $\triangle AD_1B_1$ $\Rightarrow EF\parallel AB_1$, $BC\perp(ABB_1)\Rightarrow BC\perp AB_1\Rightarrow BC\perp EF$	2 точки