РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
Министерство на образованието, младежта и науката
Регионален инспекторат по образованието – Ямбол

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ – 15.12.2012 ГОД.

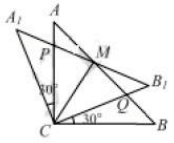
Критерии за оценяване в XI клас

Задача 1

А)За аритм.прогресия $a_1 = 2, a_3 = 2+2d, a_7 = 2+6d$ За геом.прогр. $a_1 = 2, a_3 = 2q^2, a_5 = 2q^4$	1 точка
Съставяме системата $\begin{cases} 2+2d = 2q^2 \\ \dfrac{2+6d}{2q^4} = \dfrac{5}{8} \end{cases}$, решаване на системата	1,5 точки
$d = 3 \Rightarrow q = \pm 2$	0,5 точки
$d = -0,2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{0,8}$	0,5 точки
Б) страните на правоъгълен триъгълник образуват аритм.прогресия $a < b < c, a = b-d, c = b+d$	1 точка
От Питагоровата Т: $a^2 + b^2 = c^2$ или $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$, $b = 4d, a = 3d, c = 5d$	0,5 точки
$r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{3d+4d-5d}{2} = d$, което е ест.число. Тогава $a = 3r, b = 4r, c = 5r$ са ест.числа, а радиусът на описаната окръжност $R = \dfrac{c}{2} = \dfrac{5r}{2}$	1 точка
Следователно *r=2, R=5*	0,5 точки
a=6, b=8,c=10, S=24	0,5 точки

Задача 2

Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тогава $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma \Rightarrow \dfrac{1}{4}(a^2+b^2) = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$	1 точка

$\sin\gamma \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4}(a^2+b^2) \le \dfrac{1}{2}ab \Rightarrow (a-b)^2 \le 0 \Rightarrow a = b, \sin\gamma = 1$	2 точки
$\Rightarrow \gamma = 90^0, \alpha = \beta = 90^0$	1 точка
 Нека $A_1B_1 \cap AC = P, CB_1 \cap AB = Q$.За доказано, че: $\triangle ACA_1 \cong \triangle BCB_1 \Rightarrow AA_1 = BB_1$ $\triangle AMA_1 \cong \triangle BMB_1 \Rightarrow AM = MB_1$ $\triangle AMC \cong \triangle CMB_1 \Rightarrow \sphericalangle ACM = \sphericalangle B_1CM = 30^0$ $AB = \sqrt{2} \Rightarrow AC = BC = 1$	1 точка
В $\triangle PCM \Rightarrow \sphericalangle CPM = \sphericalangle CMP = 75^0 \Rightarrow CP = CM$	1 точка
$\triangle ACM \Rightarrow \dfrac{CM}{\sin 45^0} = \dfrac{AC}{\sin 105^0} \Rightarrow CM = \dfrac{\sin 45^0}{\sin 105^0}$	1 точка
$S_{PCQM} = 2S_{PCM} = CM^2 \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^2 45^0}{\sin^2 105^0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\cos 210^0}$ $= \dfrac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$	1 точка

Задача 3

За представяне сумата на аритм.прогресия $1+2+....+x = \dfrac{x(x+1)}{2}$	1 точка
Преминаване към $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{1.2}+\dfrac{2}{3.4}+...+\dfrac{2}{x.(x+1)} = \dfrac{2012}{2011}$	1 точка
Получаване на $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{x.(x+1)} = \dfrac{1006}{2011}$	1 точка
Всяка дроб може да се представи $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$	2 точки
Получаване на уравнението $1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1006}{2011}$	1 точка
$x = \dfrac{1006}{1005}$	1 точка