РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
Министерство на образованието, младежта и науката
Регионален инспекторат по образованието – Ямбол

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

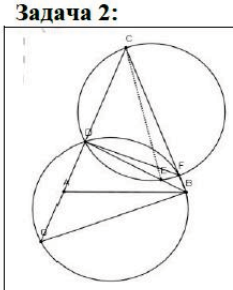
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 15.12.2012 ГОД.

Критерии за X клас:

Задача 1:

Тъй като параболата, която е графика на функцията $y = x^2 + bx + c$, се допира до абсцисната ос, то $b^2 - 4c = 0$	1 точка
Параболата има и единствена обща точка с правата $y = \frac{4}{3}x + 8$. Тогава $x^2 + bx + c = \frac{4}{3}x + 8 \Leftrightarrow x^2 + (b - \frac{4}{3})x + c - 8 = 0$ има дискриминанта, равна на 0	2 точки
$\left(b - \frac{4}{3}\right)^2 - 4(c - 8) = 0$	1 точка
Решаваме системата $\begin{cases} b^2 - 4c = 0 \\ \left(b - \frac{4}{3}\right)^2 - 4(c - 8) = 0 \end{cases}$ с неизвестни c и b и получаваме, $b = \frac{38}{3}, c = \frac{361}{9}$	2 точки
Следователно $y = x^2 + \frac{38}{3}x + \frac{361}{9}$	1 точка

Задача 2:

 Нека означим пресечната точка на описаната окръжност около $\triangle DEC$ окръжност K с BC с точка F. Тогава за окръжността K и секущите BC и BD е изпълнено: $BF.BC=BE.\ BD$	1 точка

От условието на задачата $BE = \frac{1}{2}AD$, $BD=2AD \Rightarrow BF.BC=BE.\ BD=AD^2$	1 точка
Тогава $CF.CB=CB^2-FB.CB= CB^2-AD^2 =(CB-AD)(CB+AD)$	1 точка
Нека т.G е симетрична на т.D спрямо т.A . Тогава $AD=AG$, а по условие $AC=BC$	1 точка
$CF.CB=(CB-AD)(CB+AD)=CD.CG$, откъдето следва , че $DFBG$ е вписан в окръжност	1 точка
$\sphericalangle BGD = \sphericalangle CFD$, но $\sphericalangle CFD = \sphericalangle CED$ (вписани ъгли за окръжността K)	1 точка
За равнобедрения $\triangle BGD \Rightarrow \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BGD$ (външен ъгъл) $\Rightarrow \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BGD = 2\sphericalangle DEC$	1 точка

Задача 3:

А) $D = p^2 - 4q = p^2 - 4(p - 2012) = p^2 - 4p + 8048 > 0$ за всяко p. Следователно уравнението $y = x^2 + px + q$ има два реални корена x_1 и x_2 и графиката пресича абсцисната ос в точките $A(x_1;0)$ и В $(x_2;0)$	2 точки
Б)Нека $y = x^2 + p_1x + p_1 - 2012$ и $y = x^2 + p_2x + p_2 - 2012$ са графиките на две от разглежданите функции. Тяхната пресечна точка е с координати (- 1; - 2011). Обратно т. М с тези координати лежи на графиката на всяка от функциите, защото $-2011 = (-1)^2 - p + p - 2012$	2 точки
В) $S_{ABM} = \frac{\lvert x_1 - x_2\rvert . \lvert -2011\rvert}{2} = 1005,5.\lvert x_1 - x_2\rvert$	1 точка
$S_{ABM} = 1005,5.\sqrt{p^2 - 4p + 8048} =$	1 точка
$S_{ABM} = 1005,5.\sqrt{(p-2)^2 + 8044} \geq 1005,5.\sqrt{8044} = 2011\sqrt{2011}$ - най – малкото лице , което може да има такъв триъгълник.	1 точка