НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ -16.12.2012 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
XII клас

1 зад. а) Даденото квадратно уравнение има дискриминанта

$$D = 4(b+1)^2 - 16b^2 = 4\left[(b+1)^2 - 4b^2\right] = 4(-b+1)(3b+1).$$ (0,5точки)

Отчитайки формулите на Виет, условията за наличие на два различни положителни корена се свеждат до изпълнение на следните три неравенства

$$\begin{cases} D > 0 \\ 2(b+1) > 0 \\ 4b^2 > 0 \end{cases}$$ (1точка)

Последното е еквивалентно на

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} < b < 1 \\ b > -1 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Отговор $b \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0,1)$ (1, 5 точки)

Условие б) Нека уравнението има два различни положителни корена. Тогава според решението на условие **а**) от задачата, имаме $b \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0,1)$. От равенството $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 6b$ по необходимост следва, че $b > 0$, следователно ако равенството е налице за някое b, то $b \in (0,1)$. Повдигайки в квадрат получаваме

$$\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = 36b^2,$$

$$x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 36b^2$$ (1 точка)

От формулите на Виет имаме

$$x_1 + x_2 = 2(b+1) \text{ и } x_1 x_2 = 4b^2.$$ (1 точка)

В частност $\sqrt{x_1 x_2} = 2|b| = 2b$, понеже $b > 0$. След заместване получаваме

math-bg.com

$2(b+1)+2(2b)=36b^2$,

$36b^2-6b+2=0$,

което представлява квадратно уравнение за b с решения

$b_1=-\frac{1}{6}$, $b_2=\frac{1}{3}$. (1,5 точки)

Решението $b_1=-\frac{1}{6}$ отпада понеже $b_1<0$. (0,5 точки)

Отговор. $b=\frac{1}{3}$.

2 зад.

а)изразени страните на триъгълника $a=5, b=5-d, c=5-2d$, където $0\le d\le\frac{5}{2}$ **(1 точка)**

изразен полупериметърът $p=0{,}5(15-3d)$ **(0,5точки)**

по формулата на Херон $S=0{,}25\sqrt{3(5-d)^2(5-3d)(5+d)}$ **(1точка)**

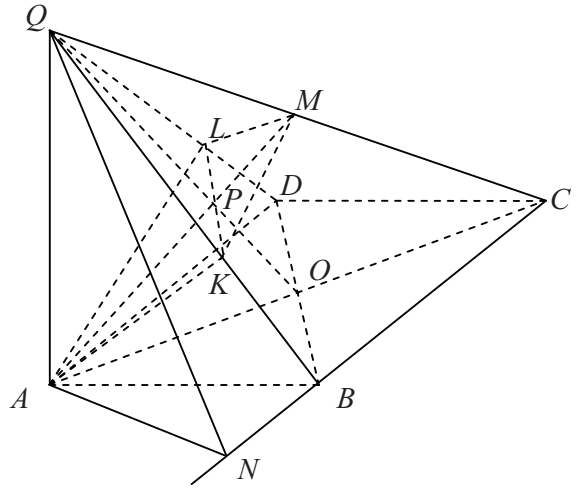
изразено $S=p.r=0{,}5(15-3d)$ **(0,5точки)**

Съставяне, решаване на уравнението и намиране на корените $d_1=1, d_2=-\frac{13}{3}$ **(3 точки)**

Направен извод, че $d_2=-\frac{13}{3}$ не удовлетворява условието на задачата **(0,5точки)**

$S=0{,}5(15-3d)=6$ **(0,5точки)**

3 зад.



math-bg.com

а) (3 точки). От правоъгълния ΔABO (точка O – пресечна точка на диагоналите, $AO \perp BO,\ AO = 9,\ \angle OAB = 30°$) $\Rightarrow AB = 6\sqrt{3}$.

$\Delta ABQ \cong \Delta ADQ \Rightarrow S_{ABQ} = S_{ADQ} = 18\sqrt{21}$.

Построяваме $AN \perp BC$ $(N \in BC)$. Тъй като $\angle ABC = 120°$, то точка N е външна за отсечката BC. Ортогоналната проекция на QN върху равнината на основата е AN, следователно по теоремата за трите перпендикуляра $QN \perp BC$.

От ΔANB - (правоъгълен и $\angle ABN = 60^{\circ} \Rightarrow \dfrac{AN}{AB} = \sin 60°$) $\Rightarrow AN = 9$.

От ΔANQ (правоъгълен) имаме $NQ^2 = AN^2 + AQ^2 = 333 \Rightarrow NQ = 3\sqrt{37}$ см.

Тъй като $\Delta BCQ \cong \Delta DCQ \Rightarrow S_{BCQ} = S_{DCQ} = 9\sqrt{111}$.

Тогава $S_{околна} = 2S_{\Delta ABQ} + 2S_{\Delta BCQ} = 18\sqrt{3}\left(2\sqrt{7} + \sqrt{37}\right)$.

б) (4 точки) Равнината на сечението пресича (ACQ) в правата AM. Нека AM пресича QO в точка P. Следователно, точка P е от сечението. В равнината BDQ построяваме права KL ($K \in BQ,\ L \in DQ$), минаваща през точка P и успоредна на BD. Тогава сечението е AKML. Той има взаимно перпендикулярни диагонали, защото $KL \parallel BD,\ AM \perp BD$ (ортогоналната проекция на AM е AC и $AC \perp BD$).

От ΔACQ (правоъгълен) $\Rightarrow CQ = \sqrt{\left(6\sqrt{7}\right)^2 + 18^2} = 24$ см. и $AM = \dfrac{1}{2}CQ = 12$ см.

Точка P е пресечна точка на медианите в $\Delta ACQ \Rightarrow \dfrac{QP}{QO} = \dfrac{2}{3}$.

От $\Delta KLQ \sim \Delta BDQ \Rightarrow \dfrac{KL}{BD} = \dfrac{QP}{QO} = \dfrac{2}{3}$ Тогава $KL = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow$.

$S_{сечението} = \dfrac{1}{2}AM.KL = 24\sqrt{3}$ см^2.

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максимален брой точки и оценителите изготвят съответните критерии.

За областен кръг се класират ученици, получили минимум 16 точки.

math-bg.com