НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 16.12.2012 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
XI клас

Зад.1. Ако $\{b_n\}$ е дадената геометрична прогресия, то

$$b_2 = b_3 - b_1 \Leftrightarrow b_1 q = b_1 q^2 - b_1 \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0$$ **(1 точка)**

Намиране на корените $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(1 точка)**

Отстраняване на q_1 **(1 точка)**

Определяне $b_5 = b_1 q^4 = \frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^4}{16}$ **(1 точка)**

Пресмятане, че $\left(1+\sqrt{5}\right)^4 = 8\left(7+3\sqrt{5}\right)$ **(1 точка)**

Прилагане на формулата за съкратено умножение и получаване, че $b_5 = 2$. **(2 точки)**

2 зад. а) Подкоренната величина не може да е отрицателна. Най-малката ú стойност е 0,

т.е. $n^2 - 8n + 16 = 0$. Решението на това уравнение е $n = 4$. **(2 точки)**

б) Допустимите стойности(ДС) на неизвестните са: **(1 точка)**

$x > 0, x \neq 1;\ y > 0, y \neq 1;\ z > 0, z \neq 1.$

Т.к. $\log_y x, \log_z y, \log_x z$ образуват геометрична прогресия, то $\left(\log_z y\right)^2 = \log_y x . \log_x z$, което е еквивалентно в ДС на $\left(\log_z y\right)^2 = \log_y z$

След прилагане на свойство на геометрична прогресия, доказано е, че $y = z$ **(2точки)**

Решена е системата $\left| \begin{array}{l} 2x^4 = y^4 + z^4 \\ xyz = 8 \\ y = z \end{array} \right.$ и отговор $\left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{array} \right.$ **(2точки)**

3 зад. Тъй като $2S = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ac\sin\beta$ (a, b и c са страните на триъгълника), то

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\gamma}} = \frac{\sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab}}{\sqrt{2S}}.$$ **(4 точки)**

Като имаме предвид неравенството $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\gamma}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt{2S}} = \frac{P}{\sqrt{2S}}.$$ **(3 точки)**

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максималния брой точки и оценителите изготвят съответните критерии.

За областен кръг се класират ученици, получили минимум 16 точки.