

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА  
Двадесет и първи турнир **Черноризец Храбър**  
1 ноември 2012 г.  
посветен на светлата памет на  
академик Стефан Додунеков

### Инструкция (11–12 клас)

1. Време за работа 90 минути. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.

2. Към всяка задача са дадени 5 възможности за отговор. В бланката за отговори срещу номера на всяка задача напишете верния според вас, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.

3. Попълвайте бланката ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате съответното поле, т.е да оставите полето срещу номера на задачата празно.

Забележка. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описаната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непопълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов, Иван Тонев и Йордан Табов.

Темата е съставена от Борислав Лазаров.

# Двадесет и първи турнир „Черноризец Храбър“

## Състезателна тема за 11–12 клас

1.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 2009 - 2010 + 2011 - 2012 =$

А) 0    Б) -2012    В) 1006    Г) -1006    Д) никое от тези

2. Ако  $x_{1,2}$  са корените на уравнението  $x^2 + 20x + 12 = 0$ , то на колко е равно  $x_1 x_2 - x_1 - x_2$ ?

А) 32    Б) 8    В) -8    Г) 2012    Д) никое от тези

3. За равнобедрения  $\triangle ABC$  е дадено  $AB = 66$  и  $AB : BC = 11 : 5$ . На колко е равен периметърът на  $\triangle ABC$ ?

А) 126    Б) 132    В) 152    Г) 162  
Д) не е единствено определен

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2012}{n^2} =$

А) 1    Б)  $\infty$     В) 0    Г) 2012  
Д) границата не съществува

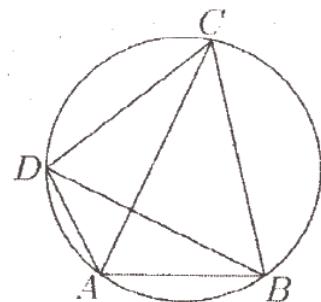
5. За многостена  $F$  с  $v$ ,  $f$  и  $c$  са означени съответно броят на върховете, на стените и на ръбовете и е определено числото  $E(F) = v + f - c$ . Как са подредени числата  $E(T)$ ,  $E(C)$  и  $E(O)$ , съответни на тетраедър  $T$ , куб  $C$  и октаедър  $O$ ? (Октаедър, например, е многостенът с върхове в средите на стените на куб.)

А)  $E(T) < E(C) \leq E(O)$     Б)  $E(T) \leq E(O) < E(C)$   
В)  $E(C) \leq E(O) \leq E(T)$     Г)  $E(O) < E(C) \leq E(T)$   
Д)  $E(O) < E(T) < E(C)$

6. На колко е равно лицето на фигурата, ограничена от графиките на функциите  $y = 1 - 2x$ ,  $y = 2 - x$  и абцисната ос?

А) 4,5    Б) 3    В) 2,25    Г) 1,5    Д) 0,75

- 7.** Кое е най-малкото число в редицата  
 $a_n = n^2 - 32n + 100$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ?
- A) 100    Б) 69    В) -156    Г) -220    Д) никое от тези
- 8.** Ако  $m$  и  $n$  са естествени числа и  $\sqrt{mn} = 21$ , то на кое от числата не може да бъде равно  $m + n$ ?
- A) 42    Б) 58    В) 150    Г) 242    Д) 442
- 9.** Колко са целите числа  $x$ , за които  $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{4 - x^2} \leq 0$ ?
- A) 2    Б) 3    В) 4    Г) 8    Д) никое от тези
- 10.** Започвайки от 2012. Пижо брои през 13 „назад“: 2012, 1999, 1986, ..., докато достигне за първи път трицифрене число – нека това число е  $a$ . Започвайки от  $a$ , Пендо брои през 7 напред:  $a, a + 7, a + 14, \dots$ , докато достигне за първи път число, по-голямо от 2012. Кое е това число?
- A) 2013    Б) 2014    В) 2015    Г) 2016    Д) 2017
- 11.** Колко са точките, чиито координати  $(x; y)$  удовлетворяват равенството  $4|x| - 6y = x^2 + y^2 + 13$ ?
- A) 0    Б) 1    В) 2    Г) 4    Д) никое от тези
- 12.** Кое от числата
- A) 3    Б) 7    В) 13    Г) 17    Д) 37  
 не е делител на 10101?
- 13.** Четириъгълникът  $ABCD$  е вписан в окръжност. Ако е известно, че  $CD = 2AB$  и  $BD : AC = 3 : 5$ , то на колко е равно отношението  $AD : BC$ ?
- A) 2:3    Б) 1:7    В) 1:8    Г) 2:5  
 Д) не може да се определи
- 14.**  $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2} =$
- A) 0    Б)  $\sqrt{2}$     В)  $-\sqrt{2}$     Г) 1    Д)  $\sqrt{7}$



**15.** Град М е на равни разстояния от селата А, В и С, които са разположени във върховете на триъгълник със страни 9 км, 10 км и 17 км. Приблизително колко километра е сборът на разстоянията от М до А, В и С?

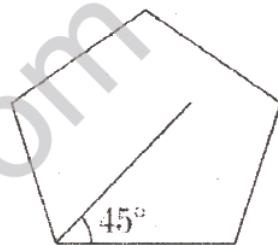
- А) 30    Б) 31    В) 36    Г) 33    Д) 32

**16.** Дадена е аритметичната прогресия  $\{a_n\}$  с  $a_1 = 11$ ,  $a_2 = 18$ . Кое е това  $n$ , за което  $a_n$  е делител на  $7n^2 + 27n + 2$ ?

- А) 5    Б) 6    В) 7    Г) 8    Д) 9

**17.** Петоъгълникът на чертежа е правилен. Светлинен лъч излиза от негов връх, както е показано, и се отразява от страна на петоъгълника. Под какъв остър ъгъл отразеният лъч пада върху друга страна на петоъгълника?

- А)  $60^\circ$     Б)  $63^\circ$     В)  $67^\circ$     Г)  $72^\circ$     Д) никое от тези



**18.** Какво представлява геометричното място на точки, лежащи в симетралната равнина на оста отсечка на две кръстосани прости и равноотдалечени от тези прости?

- А) една точка    Б) две успоредни прости  
В) две пресекателни прости    Г) една права  
Д) никое от тези

**19.** Колко са корените на уравнението  $x \cdot [x] = [x]^2 + 1$ ? ( $[x]$  е най-голямото цяло число, ненадминаващо  $x$ .)

- А) 0    Б) 1    В) 2    Г) 4    Д) безбройно много

**20.** Каква е вероятността случайно написано число с цифрите 1, 2, 3 и 4, като всяка цифра участва точно по веднъж, да е кратно на 8?

- А)  $\frac{1}{4}$     Б)  $\frac{1}{6}$     В)  $\frac{1}{12}$     Г)  $\frac{1}{24}$     Д) никое от тези

**21.** Нека  $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$  са простите числа, подредени в нарастващ ред. На всяко естествено число  $a$  съставяме редицата  $a' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots\}$ , съставена от степените в каноничния му запис  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \dots$ ,  $\alpha_i \geq 0$ . Нека в множеството  $\{a' : a \in \mathbb{N}\}$  е въведена лексикографска наредба, като от редиците  $a'$  и  $b'$  за по-голяма считаме тази, която има по-голям член на първото място, в което редиците се различават. Коя е най-малката измежду дадените редици?

А) 2009'    Б) 2010'    В) 2011'    Г) 2012'    Д) 2013'

**22.** За коя стойност на параметъра  $a$  уравнението  $|||x - 1| - 2| - 3| = a$  има точно 5 корена?

А) 0    Б) 1    В) 2    Г) 3    Д) никоя от тези

**23.** Даден е полукръг. Каква част от лицето му е лицето на ГМТ, които са среди на хорди с краища върху дъгата на дадения полукръг?

- А)  $\frac{1}{3}$     Б)  $\frac{1}{2}$     В)  $\frac{1}{4}$     Г)  $\frac{1}{\pi}$     Д)  $\frac{2}{\pi}$

**24.** Коя е най-малката стойност на функцията  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ ?

А)  $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$     Б) 1    В)  $\sqrt{2}$     Г) 2    Д) никое от тези

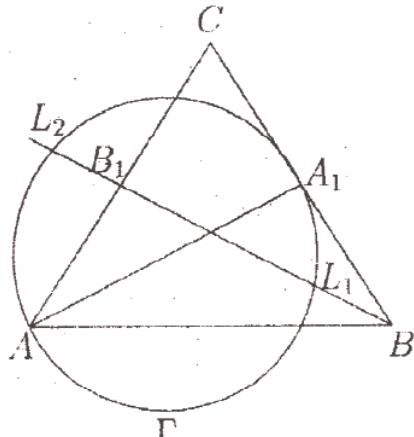
**25.** В тъждеството  $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^8 = a + \sqrt{b} + \sqrt[3]{c} + \sqrt[6]{d}$  числата  $a, b, c, d$  са рационални. На колко е равно  $a$ ?

А) 42    Б) 360    В) 504    Г) 520    Д) никое от тези

**26.** На колко е равен сборът от коефициентите пред нечетните степени на  $x$  в нормалния вид на полинома  $P(x) = (x^2 - 5x - 6)^{2012}$ ?

А)  $10^{2012}$     Б)  $2 \cdot 10^{2012}$     В)  $10^{2011}$     Г)  $5 \cdot 10^{2011}$     Д) 0

27. Точките  $A_1$  и  $B_1$  са средите съответно на страните  $BC$  и  $CA$  на равностранния  $\triangle ABC$  с периметър 36. Променлива окръжност  $\Gamma$  минава през  $A$  и  $A_1$  и отсича от правата  $BB_1$  променлива отсечка  $L_1 L_2 = L(\Gamma)$ . На колко е равна минималната дължина на  $L(\Gamma)$ ?
- А)  $6\sqrt{3}$    Б)  $8\sqrt{2}$    В)  $3\sqrt{6}$   
 Г)  $8\sqrt{3}$    Д)  $4\sqrt{6}$



28. На кое от числата
- А)  $C_{2011}^3$    Б)  $C_{2012}^3$    В)  $C_{2013}^3$    Г)  $C_{2014}^3$    Д)  $C_{2015}^3$
- е равно отпечатаното число от следната програма?

```
j:=0; s:=0;
докато j<2012 повторяй
(j:=j+1; i:=0;
докато i<j повторяй (i:=i+1; s:=s+i));
отпечатай s
```

29. В дадените задачи за умножение на унгарски език множителите са едноцифrenи, а произведенията – двуцифrenи числа:

hét · nyolc = ötvenhat;

hat · hét = negyvenkettő;

hat · kilenc = ötvennégy;

hat · nyolc = negyvennyolc;

öt · nyolc = negyven;

nyolc · kilenc = ?

- А) hatvenkettő   Б) hatvennégy   В) hatvennyolc  
 Г) hetvenkettő   Д) hetvennégy

**30.** Ребусът

$$\begin{array}{r} * * * 0 * : * * = * * * \\ * * \\ \hline * * * \\ * * 1 \\ \hline * * \\ 2 * \\ \hline n \end{array}$$

представя дълго деление, записано в бройна система с основа естествено число (звездичките са цифри, евентуално различни). На колко е равен сборът на делимото, делителя и частното, ако този сбор се запише в десетична система?

- A) 152    B) 148    C) 136    D) 124    E) никое от тези

## Отговори на задачите (9 – 10 – 11 – 12 клас)

От (трите имена) .....

Клас ..... Училище .....

Град .....

Учител: .....

Зад.	Отг.										
1.		6.		11.		16.		21.		26.	
2.		7.		12.		17.		22.		27.	
3.		8.		13.		18.		23.		28.	
4.		9.		14.		19.		24.		29.	
5.		10.		15.		20.		25.		30.	

Желая резултатът ми да бъде поместен на интернет-страницата  
на Турнира: Да  Не  
(оградете вярното). Подпись.....