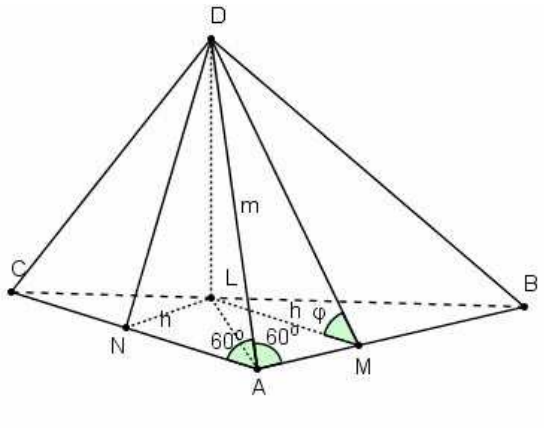
12.1. Определяне на проекцията на т.D в равнината (ABC)- т.L и от $(ABC)\perp(BCD)\Rightarrow DL\subset(BCD)$ и $DL\perp$ на всяка права от равнината (ABC) **(0,5 т.)**

Нека $DM\perp AB,\ M\in AB$ в равнината (ABD), а $DN\perp AC,\ N\in AC$ в равнината $(ACD)\Rightarrow \triangle ADN\cong\triangle ADM$ и нека да означим $LN=LM=h.$ **(1 т.)**

За пресмятане лицето на основата ABC по Хероновата формула $B=\frac{3}{4}\sqrt{15}$ **(0,5 т.)**

От това, че $S_{ABC}=S_{ACL}+S_{ABL}=\frac{1}{2}(AC+AB).h$ **(0,5 т.)**

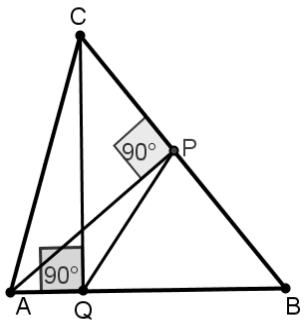


Да означим околния ръб $Ad=m.$ От правоъгълния триъгълник $ADM\Rightarrow AM=\frac{1}{2}m,$ а $DM=\frac{\sqrt{3}}{2}m.$ От правоъгълния $\triangle DLM$ по теоремата на Питагор $\Rightarrow DL^2=\frac{15m^2-27}{20}$ (1)

AL е ъглополовяща в $\triangle ABC\Rightarrow$ $AL^2=AB.AC-CL.BL$, а от основното свойство на ъглополовящата $\Rightarrow CL=\frac{12}{5}$ и $BL=\frac{8}{5}\Rightarrow AL=\frac{3\sqrt{6}}{5}$ **(1 т.)** От друга страна от правоъгълния $\triangle ADL$ по теоремата на Питагор $\Rightarrow AL^2=\frac{5m^2+27}{20}\Rightarrow\frac{9.6}{25}=\frac{5m^2+27}{20}\Rightarrow m=\frac{9}{5}$ **(1 т.)** Сега вече можем да намерим височината на пирамидата, замествалки в (1) $\Rightarrow DL=\frac{3\sqrt{3}}{5}$, и за обема получаваме $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}\sqrt{15}.\frac{3\sqrt{3}}{5}=\frac{9}{20}\sqrt{5}.$ **(1 т.)**

б) $\angle((ABC);(ABD))=\angle LMD$ **(1 т.)** От прав. $\triangle LDM\Rightarrow tg\varphi=\frac{LD}{ML}\Rightarrow tg\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **(1 т.)**

12.2. а) За доказателство, че $\Delta ABC\sim\Delta PBQ$ **(2 точки)** $\Rightarrow$ $\frac{PQ}{AC}=\frac{BQ}{BC}=\frac{PB}{AB}$, но от правоъгълните триъгълници BQC и ABP $\Rightarrow$ $\frac{BQ}{BC}=\frac{PB}{AB}=\cos\beta$ **(2 точки)**. По синусова теорема за ΔABC $\Rightarrow\frac{AC}{\sin\beta}=2R\Rightarrow\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(1точка).** От $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1\Rightarrow\cos\beta=\frac{1}{3}$ **(1 точка).** $\Rightarrow$ $\frac{PQ}{AC}=\frac{1}{3}$ и от



math.bg.

$\frac{PQ^2}{AC^2} = \frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{ABC} = 9 \Rightarrow S_{AQPC} = 8$ **(1 точка).**

12.3. Доказателство:

Тъй като $x+y+z=1$, то $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$. Ще използваме, че $y + z = 1 - x$ и ще преобразуваме даденото неравенство до следния вид:
$5(x^2 + (1-x)^2 - 2yz) \le 6(3x.yz + x^2 + (1-x)^2 - 2yz - x(1-x) - yz) + 1$.

Полагаме $yz = t$, като е ясно, че $0 \le yz \le \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$.

Тогава последното неравенство придобива следния вид:
$5(x^2 + (1-x)^2 - 2t) - 6(3x.t + x^2 + (1-x)^2 - 2t - x(1-x) - t) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$
$(-10 - 18x + 12 + 6)t + 5(x^2 + (1-x)^2) - 6(x^2 + (1-x)^2 - x(1-x)) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$
$(-18x + 8)t - 8x^2 + 8x - 2 \le 0$
Разглеждаме линейна функция относно t.

$F(t) = (-18x + 8)t - 8x^2 + 8x - 2$, която е определена в интервала $0 \le t \le \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$. Ще докажем, че тя приема само отрицателни стойности в целия си дефиниционен интервал. Знаем, че ако линейната функция приема стойности с едни и същи знаци в краен затворен интервал, то тя приема такива за целия интервал. {Теорема: Ако за функцията $f(x) = ax + b$ е изпълнено $f(\alpha) \ge 0$ и $f(\beta) \ge 0$, то $f(x) \ge 0$, за всяко $x \in [\alpha, \beta]$.}
В нашия случей $F(0) = -8x^2 + 8x - 2 = -2(2x-1)^2$, който за всяко x према само отрицателни стойности.

Разглеждаме израза $F\left(\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\right) = (-18x + 8)\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 - 8x^2 + 8x - 2 = \frac{-x(3x-1)^2}{2}$, който отново, за всяко x, према само отрицателни стойности. Следователно за всяко $t \in [0, \left(\frac{1-x}{2}\right)^2]$, $F(t) \le 0$, което трябваше да докажем.

Точкуване: За определяне на $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$ (1 точка)

За преработване на $y + z = 1 - x$ и съображението $yz \le \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$.(1 точка)

За въвеждане на функцията (+ деф. интервал) – (1 +1 точки)

За съображенията за постоянен знак – (1 точка)

За проверките в краищата на интервала – (1+1 точки)

Задачата може да се реши и по друг начин.

math-bg.com