



Утвърдил:  
Началник на РИО-Благоевград:  
/Ивайло Златанов/

XI КЛАС

**Зад 1.** а) За аритм. прогр.  $a_1 = 2$ ,  $a_3 = 2 + 2d$ ,  $a_7 = a + 6d$ .

За геом. прогр. имаме  $a_1 = 2$ ,  $a_3 = 2 \cdot q^2$ ,  $a_5 = 2 \cdot q^4$ . 1 т.

$$\begin{array}{l} \text{Съставяме системата} \quad \left| \begin{array}{l} 2 + 2d = 2q^2 \\ \frac{2 + 6d}{2q^4} = \frac{5}{8} \end{array} \right. \quad (0,5 \text{ т.}) \text{ Решаване на системата (1 т.)} \quad 1,5 \text{ т.} \end{array}$$

$$\text{Получаваме 4 реш.: за } d = 3 \Rightarrow q = \pm 2; (0,5 \text{ т.}) \text{ за } d = -0,2 \Rightarrow q = \pm \sqrt{0,8} (0,5 \text{ т.}) \quad 1 \text{ т.}$$

6) От  $a < b < c$  на прав. тр. образуват аритм. Прогр. с разлика  $d$ , то  $a = b - d$ ,  $c = b + d$  1 т.

от Питагор. т.:  $a^2 + b^2 = c^2$  или  $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$ , сл.  $b = 4d$ ,  $a = 3d$ ,  $c = 5d$       0,5 т.

$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3d+4d-5d}{2} = d$ , което е ест. ч.. Тогава  $a=3r$ ,  $b=4r$ ,  $c=5r$  са естествени

числа, а радиусът  $R$  на описаната окръжност е  $R = \frac{c}{2} = \frac{5r}{2}$ . 1 т.

Сл.  $R$  е просто число, само когато  $r = 2$ ,  $R = 5$ .

Така,  $a = 6$ ,  $b = 8$ ,  $c = 10$ , а лицето е  $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ .  **0,5 т.**

**Зад 2. а)** За намиране на  $CT$ , ще приложим косинусова теорема за  $\triangle XTC$ . Тъй като  $\triangle ABX$  и  $\triangle CDX$  са правоъгълни, то  $\frac{CD}{CX} = \sin \alpha$ ,  $\frac{BA}{XB} = \sin \alpha \Leftrightarrow XC = \frac{b}{\sin \alpha}$ ,  $XB = \frac{a}{\sin \alpha}$ . 1 т.

От усл. за дължина на доп. към окр.  $XT^2 = XC \cdot XB$  сл., че  $XT = \frac{\sqrt{ab}}{\sin \alpha}$  1 т.

Прилагаме косинусова теорема за  $\Delta XCT$ , т.e.

$$CT = \sqrt{XT^2 + XC^2 - 2XT \cdot XC \cos \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sin \alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sin \alpha}\right)\left(\frac{b}{\sin \alpha}\right) \cos \alpha} = \sqrt{\frac{ab + b^2 - 2b\sqrt{ab} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}. \text{ По условие}$$

тъгъл  $\alpha$  е остър, следователно  $\sin\alpha \in (0,1)$ . Оттук намираме, че  $CT = \frac{\sqrt{b(a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha)}}{\sin\alpha}$

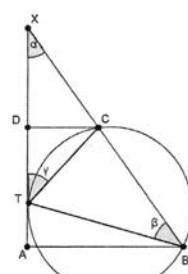
6) От синусова теорема за  $\Delta TBC$ ,  $\angle TDC$  е остроъгълен и сл.  $\angle \gamma = \angle DTC$  е остър. Той е иiperиферен за окръжността и следователно  $\angle \gamma = \angle TBC = \angle \beta$ ;  $\sin \gamma = \sin \beta$ . 0,5 т.

$$\text{Сл. } \sin\beta = \sin\gamma = \frac{DC}{CT} = \frac{b}{\sqrt{b(a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha)}} = \frac{\sqrt{b}\sin\alpha}{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}\cos\alpha}}.$$

От синусовата теорема за  $\Delta TBC$  получаваме  $2R = \frac{CT}{\sin \beta}$ , откъдето

последователно получаваме, че  $R = \frac{\sqrt{b(a+b-2\sqrt{ab} \cos\alpha)}}{\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{b}\sin\alpha}} = \frac{a+b-2\sqrt{ab} \cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$  -

За лицето на кръга получаваме  $S = \pi \left( \frac{a+b-2\sqrt{ab} \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \right)^2$



**Зад.3** За представяне сумата на аритметичната прогресия  $1 + 2 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2}$  **1 т.**

Преминаваме към тъждественото уравнение:  $\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{3.4} + \dots + \frac{2}{x.(x+1)} = \frac{2012}{2011}$  **1 т.**

И получаване на уравнението:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{x.(x+1)} = \frac{1006}{2011}$  **1 т.**

Можем да представим всяка една от дробите  $\frac{1}{x.(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$  **2 т.**

От където получаваме уравнението:  $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{1006}{2011}$  **1 т.**

$\Rightarrow x = \frac{1006}{1005}$  **1 т.**