НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ -18.12.2011 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
XII клас

1 зад а) Получаване на уравнението $x^2 - 13x + 9 = 0$, определяне на D = 133 > 0 **1 т.**

Определяне на $A^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{x_1.x_2}$ и прилагане на формулите на

Виет $x_1 + x_2 = 13$ и $x_1.x_2 = 9$ **1 т**

Намиране на $A^2 = 19$ и обосноваване на $A \geq 0$ и $A = \sqrt{19}$ **1 т.**

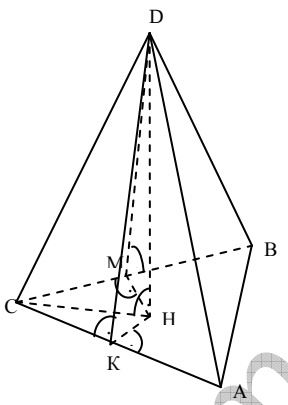
б) Прилагане формулите на Виет $x_1 + x_2 = 4k + 1$ и $x_1.x_2 = 2k + 3$ **1 т.**

Изразяване на $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (4k+1)^2 - 2(2k+3) = 16k^2 + 4k - 5$ **1 т.**

Решаване на уравнението $16k^2 + 4k - 5 = 14k^2 + 9k - 2$ и намиране на $k_1 = 3$ и $k_2 = -0{,}5$ **1 т.**

Проверка на стойностите k_1 и k_2 в условието $D = 16k^2 - 11 \geq 0$ и определяне $k = 3$ **1 т.**

2 зад.. Нека H е ортогонална проекция на върха D върху равнината ABC. Построени са $HK \perp AC\,(K \in AC)$ и $HM \perp BC\,(M \in BC)$ **0,75 т.**



От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $DK \perp CA$ и $DM \perp BC$. **0,75 т.**

Тъй като $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$ и CD е обща страна, правоъгълните триъгълници CKD и CMD са еднакви, откъдето CK = CM. **0,75 т.**

Доказано, че $\Delta CKH \cong \Delta CMH$ **0,75 т.**

$\angle KCH = \angle MCH = \frac{1}{2}\angle ACB = 30^\circ$ **0,50 т.**

От ΔCKD $CK = CD\cos\angle ACD = 4\cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$. **0,75 т.**

От ΔCKH $CH = \frac{CK}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ **0,75 т.**

Височината на пирамидата пресмятаме от ΔCHD

$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **0,75 т.**

$S_{ABC} = \frac{AC.BC.\sin\angle ACB}{2} = \frac{6.5.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ **0,75 т.**

Обемът на пирамидата е $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DH = \frac{1}{3}.\frac{15\sqrt{3}}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{3} = 10\,\text{cm}^2$. **0,50 т.**

3 зад. а) Нека O е центъра на окр. k, а DP и CQ са височини на трапеца.

От тр. OBC намираме $BC = 2\,OB\cos\alpha = 2\cos\alpha$; **1 т.**

$CQ = BC\sin\alpha = \sin 2\alpha$; **0,5 т.**

$AP = BQ = BC\cos\alpha = 2\cos^2\alpha$; **0,5 т.**

$CD = AB - 2\,AP = 2 - 4\cos^2\alpha = -2\cos 2\alpha$; **0,5 т.**

$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}.CQ = 2\sin^2\alpha.\sin 2\alpha = 4\sin^3\alpha.\cos\alpha$. **1 т.**

math-bg.com

б) Разглеждаме функцията $f(\alpha) = 4\sin^3\alpha.\cos\alpha$.

$f'(\alpha) = 12\sin^2\alpha.\cos^2\alpha - 4\sin^4\alpha = 4\sin^2\alpha.(3 - 4\sin^2\alpha)$. **1 т.**

$f'(\alpha) = 0$; $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; α = 60˚; **1 т.**

f(α) расте при $\alpha \in (45°; 60°)$ и *f*(α) намалява при $\alpha \in (60°; 90°)$. **1 т.**

Тогава лицето на трапеца е най-голямо при α = 60˚. **0,** 5

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максималния брой точки.

За областен кръг се класират ученици, получили минимум 16 точки.

math-bg.com