Математически турнир „Иван Салабашев“, 2011 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Точките A, B, C, D, E и F лежат на една права в посочения ред. Известно е, че $AF = 120$ cm, $AB : BF = 1 : 2$, $BC : CF = 1 : 7$, $CD : DF = 2 : 5$ и $DF : DE = 5 : 3$. Да се намери EF.

А) 12 cm **Б)** 24 cm **В)** 20 cm **Г)** 10 cm

Отговор: В. Последователно пресмятаме $AB = 40$ и $BF = 80$, $BC = 10$ и $CF = 70$, $CD = 20$ и $DF = 50$. От последното получаваме $50 : DE = 5 : 3$, откъдето $DE = 30$ и $EF = DF - DE = 20$.

2. Ако n е цяло число, за което $\dfrac{(2^6.3^5)^3.2^5.3^8}{6^{24}} = 6^n$, то n е равно на:

А) -2 **Б)** -1 **В)** 0 **Г)** 12

Отговор: Б. Изразът отляво е $\dfrac{2^{18}.3^{15}.2^5.3^8}{6^{24}} = \dfrac{6^{23}}{6^{24}} = 6^{-1}$. Следователно $n = -1$.

3. Да се намери броят на целите числа n, за които числото $\dfrac{42n + 2011}{2n + 7}$ също е цяло.

А) 0 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 8

Отговор: В. Тъй като $\frac{42n+2011}{2n+7} = 21 + \frac{1864}{2n+7}$, числото $2n + 7$ е нечетен делител на 1864. Имаме $1864 = 2^3.233$, като 233 е просто число. Следователно $2n + 7$ може да приема стойностите ± 1 и ± 233, откъдето намираме 4 възможни стойности на n.

4. Да се намери най-голямото четно трицифрено число, което дава остатък 22 при деление на 23.

А) 988 **Б)** 990 **В)** 968 **Г)** 970

Отговор: А. Имаме $988 = 42.23 + 22$ и следователно търсеното число е 988.

5. Дължината, ширината и височината на един правоъгълен паралелепипед били увеличени съответно с 5%, 10% и 20%. С колко процента се е увеличил обемът на паралелепипеда?

А) 38,8% **Б)** 37,75% **В)** 37,6% **Г)** 38,6%

Отговор: Г. Ако обемът е бил $V = abc$, то след увеличението той е станал $V_1 = a.1,05.b.1,1.c.1,2 = abc.1,05.1,1.1,2 = 1,386abc$, т.е. увеличението е с 38,6%.

6. Ако $a = 3$ и $b = 4$, а с $[x]$ се означава най-голямото цяло число, което не надминава x, да се намери

$$[-3,14] + \left[\frac{2011}{5}\right] - \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right].$$

А) 395 **Б)** 396 **В)** 498 **Г)** друго число

Отговор: Б. Тъй като $-4 = [-3.14]$, $\left[\frac{2011}{5}\right] = [402,2] = 402$ и $\left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right] = \frac{25}{12} = 2$, търсеното число е $-4 + 402 - 2 = 396$.

7. В един ред в киносалон има 30 стола. Когато Иван пристигнал, се оказало, че няма как да седне така, че и двата съседни стола да са празни. Какъв е най-малкият възможен брой заети столове?

А) 9 **Б)** 10 **В)** 15 **Г)** 20

Отговор: Б. Тъй като няма как да има три поредни свободни стола, заети са поне $30 : 3 = 10$ стола. От друга страна, ако са заети 10-те стола с номера $2, 5, \ldots, 29$, условието е изпълнено.

8. В $\triangle ABC$ с лице 980 cm^2 точките M и N са среди съответно на отсечките AB и CM, а точките P и Q са вътрешни съответно за отсечките AN и BN и ги делят в отношение $1:6$, считано от N. Да се намери лицето на четириъгълника $PMQN$.

А) 70 **Б)** 35 **В)** 49 **Г)** 98

Отговор: А. Тъй като CM е медиана в $\triangle ABC$, имаме $S_{ACM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 490$. Аналогично намираме $S_{AMN} = 245$. Триъгълниците PMN и AMN имат обща височина от върха M, а страните им PN и AN, съответни на тази обща височина, се отнасят както $1:7$. Следователно $S_{PMN} = \frac{1}{7}S_{AMN} = 35$. Аналогично се вижда, че $S_{QMN} = 35$ и значи $S_{PMQN} = S_{PMN}+S_{QMN} = 70$.

9. Да се намери остатъкът, който се получава при делението на $(2011^2 - 2013)^{2011}$ на 9.

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 7

Отговор: Б. Тъй като сумата от цифрите на числото $(2011^2-2013)^{2011} = 4042108$ е $19 = 2.9+1$, остатъкът при делението на това число на 9 е равен на 1. Тогава и след повдигането на 2011-та степен остатъкът при деление на 9 ще е 1.

10. Да се намери броят на четните трицифрени естествени числа, които не се делят на 11.

А) 409 **Б)** 408 **В)** 400 **Г)** 410

Отговор: А. Броят на четните трицифрени числа е $900 : 2 = 450$. От тях на 11 се делят числата $110, 132, 154, \ldots, 990$, общо 41 на брой. Следователно търсеният брой е $450 - 41 = 409$.

11. В триъгълник ABC ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$ и $B_1 \in AC$) се пресичат в точка O. Ако $2 \sphericalangle ACB = 5 \sphericalangle AOB_1$, да се намери $\sphericalangle ACB$.

Отговор: $100°$. Тъй като

$$\sphericalangle AOB = 180° - \sphericalangle BAO - \sphericalangle ABO = 90° + \frac{1}{2} \sphericalangle ACB,$$

намираме $\sphericalangle AOB_1 = 180° - \sphericalangle AOB = 90° - \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$. Следователно $90° = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB + \frac{2}{5} \sphericalangle ACB = \frac{9}{10} \sphericalangle ACB$, откъдето $\sphericalangle ACB = 100°$.

12. Колко са двуцифрените естествени числа, със сума на цифрите им, равна на точен квадрат (например 27 е такова число, защото $2 + 7 = 3^2$).

Отговор: 17. Последователно виждаме, че двуцифрените числа със сума на цифрите i, както и тези със сума $19-i$, за фиксирано i, $1 \le i \le 9$, са точно i на брой. Оттук следва, че търсеният брой е $1 + 4 + 9 + 3 = 17$.

13. Простите числа p и q са такива, че $p^2 + pq + q^2 = r^2$, където r е естествено число. Да се намерят всички възможни стойности на r.

Отговор: 7. Даденото равенство се представя във вида $(p + q)^2 - r^2 = pq$, откъдето $(p + q + r)(p + q - r) = pq$. Тъй като $p + q + r > \max\{p, q\}$, имаме единствена възможност $p + q + r = pq$ и $p + q - r = 1$. Като изключим r от тези равенства, получаваме $pq - 2p - 2q + 1 = 0$, откъдето $(p-2)(q-2) = 3$. Сега лесно се вижда, че $p = 5$, $q = 3$ или $p = 3$, $q = 5$, като и в двата намираме $r = 7$.

14. Естествените числа a, b и c са такива, че $a^2 + b^2 + c^2 = 2011$ и $a \le b \le c$, а c приема минимална възможна стойност. Да се намерят всички възможни стойности на сумата $a+b+c$.

Отговор: 77. Тъй като $2011 \equiv 3 \pmod 4$, числата a, b и c са нечетни (при всяка друга възможност получаваме противоречие по модул 4). Освен това $2011 = a^2 + b^2 + c^2 \le 3c^2$, откъдето $c^2 > 670$ и следователно $c \ge 27$.

При $c = 27$ получаваме $a^2 + b^2 = 2011 - 729 = 1282$, като a и b са нечетни и $a \leq b \leq 27$. При $b \leq 25$ имаме $a^2 + b^2 \leq 2.625 = 1250 < 1282$, а при $b = 27$ получаваме $a^2 = 1282 - 729 = 553$, което не е точен квадрат.
При $c = 29$ получаваме $a^2 + b^2 = 1170$. Тъй като 1170 се дели на 3, числата a и b също се делят на 3. Ако $a = 3x$, $b = 3y$, $x, y \in \mathbb{N}$, получаваме $x^2 + y^2 = 130$, $x \leq y$. Непосредствено се проверява, че последното уравнение има две решения: $3^2 + 11^2 = 130$ и $7^2 + 9^2 = 130$, като само второто води до решение на изходното уравнение при условието $a \leq b \leq c$. Следователно $a = 21$, $b = 27$ и $c = 29$, откъдето $a + b + c = 77$

15. За някакви числа a и b съпоставяме на всяко число x числото $ax + b$. Да се намери сумата на числата a и b, ако е известно, че за всяко x на числото $ax + b$ се съпоставя числото $(a^2 - a + 2)x + 2013$.

Отговор: 673. Ако означим $f(x) = ax + b$, от условието следва, че $(a^2 - a + 2)x + 2013 = f(ax+b) = a(ax+b)+b = a^2x+ab+b$ за всяко x. Тогава $a^2 - a + 2 = a^2$ и $ab + b = 2013$, откъдето $a = 2$ и $b = 2013 : 3 = 671$, т.е. $a + b = 673$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.