LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

Критерии за оценяване

9. клас

1. Дадено е уравнението: $\dfrac{2a^2+3a-5x}{x^2+(2-2a)x-2a+1}=2-\dfrac{3x+a+2}{x+1}$**, където** a **е параметър.**

а) Решете уравнението за $a=-1$**.** **3 точки**

б) При кои стойности на параметъра a **уравнението има единствен реален корен?** **4 точки**

Намерено:

а) При $x\neq-1$ и $x\neq-3$ уравнението е еквивалентно на $x^2-3x-4=0$ 2 т.

Корените на последното уравнение са -1 и 4, като -1 не е допустима стойност и не е решение. Следователно уравнението има единствен корен, равен на 4. 1 т.

б) Уравнението е еквивалентно на $\dfrac{2a^2+3a-5x}{(x+1)(x-2a+1)}=2-\dfrac{3x+a+2}{x+1}$. 1 т.

При $x\neq-1$ и $x\neq 2a-1$ получаваме уравнението $x^2-(4+a)x+4a=0$ с корени 4 и a. 1 т.

Първоначалното уравнение има единствен реален корен, ако:

$a=4$, или $a=-1$, или $a=2a-1$, т.е. $a=1$, или $4=2a-1$, т.е. $a=2{,}5$. 2 т. (за всяка стойност на параметъра по 0,5 т.)

2. Даден е квадратният тричлен $f(x)=x^2+px+q$**, а** x_1 **и** x_2 **са корените на уравнението** $f(x)=0$**.**

а) Намерете коефициентите p **и** q**, ако** $f(x_1+x_2)=6$ **и** $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=2$**.**

3 точки

б) Намерете корените x_1 **и** x_2**, ако** x_1 **е цяло число, а** x_2 **и** $f(11)$ **са прости числа.**

4 точки

Намерено:

а) От формулите на Виет $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$. 1 т.

Тогава от $f(x_1+x_2)=6$ получаваме $q=6$, 1 т.

а от $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=2$ следва, че $p^2=4q$, т.е. $p=\pm2\sqrt{6}$. 1 т.

б) $f(11)=(11-x_1)(11-x_2)$ 1 т.

$f(11)$ е просто число, ако:

1 сл. $11-x_1=1$ и $11-x_2$ е просто число. Но x_2 е също просто число, а $11-x_2$ и x_2 са с различна четност, т.е. едно от тях е равно на 2. Ако $x_2=2\Rightarrow 11-x_2=9$ - не е просто. Ако

math-bg.com

$11-x_2=2 \Rightarrow x_2=9$ - не е просто. Следователно в този случай няма решение.

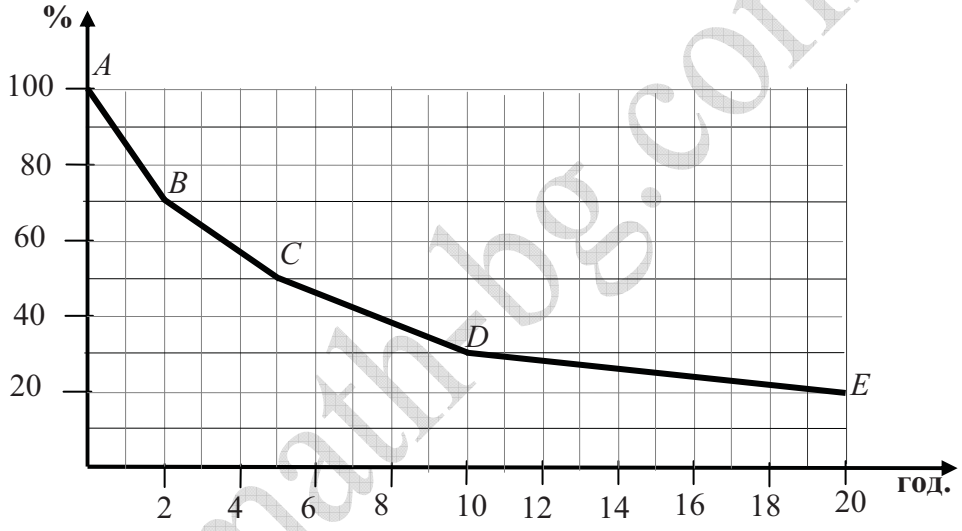
1 т.

2 сл. $11-x_1=-1$ и x_2-11 е просто число. Както в предния случай, едно от числата x_2-11 и x_2 е равно на 2. Ако $x_2=2 \Rightarrow x_2-11=-9$ - не е просто. Ако $x_2-11=2 \Rightarrow x_2=13$ е просто число. Следователно $x_2=13$ и $x_1=12$. 1 т.

3 сл. $11-x_2=1$ и $11-x_1$ е просто число. Тогава $x_2=10$ - не е просто. Следователно в този случай няма решение. 0,5 т.

4 сл. $11-x_2=-1$ и x_1-11 е просто число. Тогава $x_2=12$ - не е просто. Следователно в този случай няма решение. 0,5 т.

3. Фирма „Автомобил за всеки" продава употребявани автомобили. Дадената графика проследява как се променя цената на автомобил от определен клас (в проценти от първоначалната му цена) в зависимост от възрастта му. Тя се състои от четирите отсечки *AB*, *BC*, *CD* и *DE*.



а) С колко % се понижава цената на автомобил от този клас след 7 години употреба? 2 точки

б) Каква е възрастта на автомобил от такъв клас, ако цената му в автокъщата е 15 300 лв, а като нов той е струвал 27 000 лв? 2 точки

в) Запишете аналитичното представяне на функцията $p=f(n)$ за $n \in [0;10]$, където *p* е колко процента от първоначалната цена е цената на автомобил след *n* години употреба. 3 точки

а) Отсечката *CD* отразява промяната на цената на автомобил на възраст от 5 до 10 години. За този период от 5 години цената се понижава с 20 % (от 50% на 30%). За 2 години в този период цената ще се понижи с $\frac{2}{5} \cdot 20\% = 8\%$. Следователно след 7 години употреба цената на автомобила ще бъде 42% от първоначалната, т.е. се е понижила с 58 %.

2 т.

mathbg.com

Забележка: За отговор в интервала от 40% до 45 %, но различен от 42 % - 1 т.

б) $\frac{15300}{27000}\cdot 100=\frac{170}{3}=56\frac{2}{3}\%$. Цената на автомобила е $56\frac{2}{3}\%$ от първоначалната.

1 т.

Възрастта му ще определим от отсечката *BC*. Между втората и петата година, т.е. за 3 години цената на автомобила се понижава с 20 % (от 70% до 50%). Следователно за една година тя се понижава с $6\frac{2}{3}\%$. Възрастта на автомобила е 4 години.

1 т.

в) За $n\in[0;2]$ функцията е линейна и нека има вида $f(n)=an+b$. Точките A(0; 100) и B(2; 70) са от графиката й. Следователно 100 = *b* и 70 = 2*a* + 100, т.е. $a=-15$.

$f(n)=-15n+100$. 1 т.

За $n\in[2;5]$ функцията е линейна и нека има вида $f(n)=cn+d$. Точките B(2; 70) и C(5; 50) са от графиката й. Следователно 70 = 2*c* + *d* и 50 = 5*c* + *d*, откъдето получаваме $c=-\frac{20}{3}$ и $d=\frac{250}{3}$, а $f(n)=\frac{-20n+250}{3}$. 1 т.

За $n\in[5;10]$ функцията е линейна и нека има вида $f(n)=en+f$. Точките C(5; 50) и D(10; 30) са от графиката й. Следователно 50 = 5*e* + *f* и 30 = 10*e* + *f*, откъдето получаваме $e=-4$ и $f=70$, а $f(n)=-4n+70$.

$$p=f(n)=\begin{cases}-15n+100, & \text{за } n\in[0;2]\\ \frac{-20n+250}{3}, & \text{за } n\in[2;5]\\ -4n+70, & \text{за } n\in[5;10]\end{cases}.$$ 1 т.

math-bg.com