LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

Критерии за оценяване

12. клас

1. Дадено е уравнението $2^x\left(2^x-a\right)x-2^x\left(a-2^x\right)=(a-3)(x+1)$**, където** ***a*** **е параметър.**

а) Решете уравнението при *a* = 3. **2 точки**

б) Намерете стойностите на параметъра *a*, за които уравнението има точно две отрицателни решения. **5 точки**

а) При $a = 3$ получаваме $2^x\left(2^x-3\right)x-2^x\left(3-2^x\right)=0 \Leftrightarrow 2^x\left(2^x-3\right)(x+1)=0$. 1 т.

Корените на уравнението се получават от уравненията $2^x=0, 2^x-3=0$ и $x+1=0$.

Първото уравнение няма решение, а от другите следва, че $x=\log_2 3$ и $x=-1$.

1 т.

б) След полагане на $2^x=t>0$ получаваме $t(t-a)x+t(t-a)=(a-3)(x+1)$

$\Leftrightarrow t(t-a)(x+1)=(a-3)(x+1) \Leftrightarrow (x+1)\left(t^2-at-a+3\right)=0$ 1 т.

Един от корените на уравнението е $x = -1$. Следователно уравнението ще има точно две отрицателни решения, ако квадратното уравнение $t^2-at-a+3=0$ има единствен корен в интервала (0; 1), различен от $2^{-1}=\frac{1}{2}$. 1 т.

1 сл. $D = 0$. $D=a^2+4a-12=0 \Leftrightarrow a_1=-6, a_2=2$. При $a = -6$ уравнението има двоен корен, равен на -3 – не е решение ($t=2^x>0$). При $a = 2$ уравнението има двоен корен, равен на 1. Но от $2^x=1 \Rightarrow x=0$ - не е отрицателно число. Следователно $a = 2$ не е решение.

1 т.

2 сл. $D > 0$. Уравнението ще има единствен корен в интервала (0; 1), ако

$\left(0^2-a.0-a+3\right)\left(1^2-a.1-a+3\right)<0 \Leftrightarrow (-a+3)(4-2a)<0 \Leftrightarrow a\in(2;3)$. 1 т.

Числото $\frac{1}{2}$ е корен на уравнението $t^2-at-a+3=0$, ако

math-bg.com

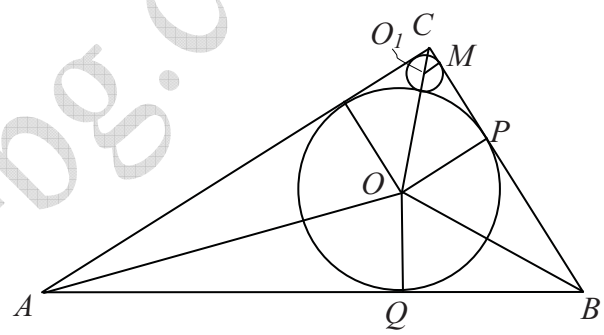
$\frac{1}{4}-\frac{a}{2}-a+3=0 \Leftrightarrow 1-2a-4a+12=0 \Leftrightarrow a=\frac{13}{6}$. При $a=\frac{13}{6}$ уравнението има единствен корен от интервала (0; 1), но той е $\frac{1}{2}$ и първоначалното уравнение ще има само един отрицателен корен -1. Следователно $a=\frac{13}{6}$ не е решение. Окончателно

$$a \in \left(2;\frac{13}{6}\right) \cup \left(\frac{13}{6};3\right).$$ 1 т.

2. Окръжността *k* е вписана в правоъгълния триъгълник *ABC* $(\measuredangle C=90^\circ)$, а окръжността k_1 с радиус, равен на $3\sqrt{2}-4$, се допира външно до *k* и до катетите на триъгълника.

а) Намерете радиуса на окръжността *k*. **3 точки**

б) Ако $\measuredangle BAC=15^\circ$, докажете, че $AB=4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. **4 точки**



а) Нека окръжностите k и k_1 са съответно с центрове O и O_1 и радиуси r и r_1. Тогава $O_1M = MC = r_1$, $O_1C = r_1\sqrt{2}$, $OP = PC = r$, $OC = r\sqrt{2}$. 1 т.

Но $O_1O = r + r_1 = (r - r_1)\sqrt{2}$. 1 т.

$$\Rightarrow r=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}r_1=\left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(3\sqrt{2}-4\right)=\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}-4\right)=\sqrt{2}.$$ 1 т.

б) От триъгълниците AQO и BQO следва, че $AQ=r\operatorname{cotg}\frac{15^\circ}{2}$ и $BQ=r\operatorname{cotg}\frac{75^\circ}{2}$.

1 т.

$$AB=r\left(\operatorname{cotg}\frac{15^\circ}{2}+\operatorname{cotg}\frac{75^\circ}{2}\right)=r\frac{\sin 45^\circ}{\sin\frac{15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ}{2}}=$$ 1 т.

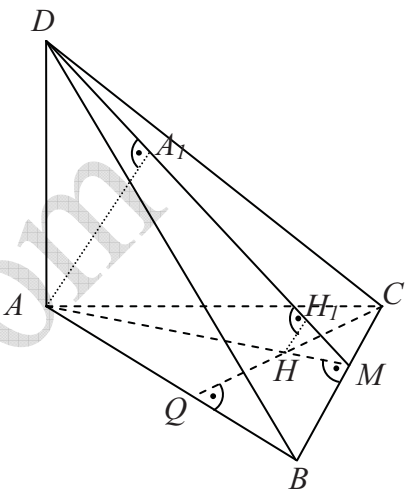
$$r\frac{2\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ-\cos 45^\circ}=\sqrt{2}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$ 2 т.

math-bg.com

3. Ръбът *AD* на триъгълната пирамида *ABCD* е перпендикулярен на основата *ABC*.

а) Докажете, че ортоцентърът на триъгълника *ABC* се проектира върху равнината (*BCD*) в ортоцентъра на триъгълника *BCD*. **4 точки**

б) Намерете обема на пирамидата, ако $AB = BC = AC = \sqrt{6}$, а ръбът *AD* сключва с равнината (*BCD*) ъгъл, чийто косинус е равен на $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3 точки**



а) Нека върхът A се проектира върху равнината (BCD) в точка A_1, а ортоцентърът H на триъгълника ABC – в точка H_1.

От $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow A_1D \perp BC$ (теорема за трите перпендикуляра). 1 т.

Нека $DA_1 \cap BC = M$ AM се проектира върху равнината (BCD) в A_1M. Тъй като $A_1M \perp BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Следователно $H \in AM$ и $H_1 \in DM$. 1 т.

От H ортоцентър на триъгълника ABC следва, че $CH \perp AB$, а от $AD \perp (ABC) \Rightarrow CH \perp AD \Rightarrow CH \perp (ABD) \Rightarrow CH \perp BD$.

Тогава от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $CH_1 \perp BD$. Но и $DH_1 \perp BC$ и следователно H_1 е ортоцентър на триъгълника BCD. 2 т.

б) $\measuredangle(AD;(BCD)) = \measuredangle ADA_1 = \alpha$, тъй като DA_1 е проекцията на DA върху равнината (BCD).

0,5 т.

$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ (височина в равностранния триъгълник ABC).

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AM = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}.3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 1 т.

От правоъгълния триъгълник AMD получаваме $AD = AM \operatorname{cotg}\alpha$

От $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогава $AD = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$. 1 т.

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}.AD = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 0,5 т.

math-bg.com