

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

**Двадесети турнир Черноризец Храбър**  
**1. ноември 2011 г.**

**Инструкция (11–12 клас)**

1. Време за работа 90 минути. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.

2. Към всяка задача са дадени 5 възможности за отговор. В бланката за отговори срещу номера на всяка задача напишете верния според вас, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.

3. Попълвайте бланката ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате съответното поле, т.е. да оставите полето срещу номера на задачата празно.

Забележка. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описаната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непопълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов и Йордан Табов.

Темата е съставена от Борислав Лазаров.

# Двадесети турнир „Черноризец Храбър“

## Състезателна тема за 11–12 клас

1.  $\log_{20} 11 \in$

- А)  $(-\infty; -1]$    Б)  $(-1; 0]$    В)  $(0; 1]$    Г)  $(1; 10]$    Д)  $(10; +\infty)$

2. На кой от интервалите принадлежат корените на уравнението  $\sqrt{x^2 + 1} = x + 2011$ ?

- А)  $(-\infty; -2000]$    Б)  $(-2000; -1000)$    В)  $[-1000; 0)$   
Г)  $[0; 1000)$    Д)  $[1000; +\infty)$ .

3. На колко е равен сборът от членовете на аритметичната прогресия  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2011}\}$  с първи член  $a_1 = -1005$  и разлика  $d = 1$ ?

- А) 0   Б) 1   В) 2011   Г)  $\frac{2011 \cdot 2012}{2}$    Д) никое от тези

4. Намерете най-малкия корен на уравнението  
 $4x^2+2x-6 = 8x^2-3x+8$ .

- А) 4   Б) 5   В) 7   Г) 9   Д) 10

5. На материална точка действат две сили, чиито посоки сключват ъгъл  $60^\circ$ . Ако големините на двете сили са съответно 2 N и 3 N, то кое от числата

- А) 1,5   Б) 2,5   В) 3,5   Г) 4,5   Д) 5,5

е най-добро приближение за големината на резултантната сила (в нютони)?

6. Как са подредени по големина числата  $s = \sin 2011\pi$ ,  $c = \cos 2011\pi$  и  $t = \operatorname{tg} 2011\pi$ ?

- А)  $s < c < t$    Б)  $c < s < t$    В)  $t < c < s$    Г)  $s < t < c$   
Д) никое от тези

7. Лицата на стените на правоъгълен паралелепипед са 6, 8 и 12. На колко е равен обемът му?

- А) 24    Б) 48    В) 72    Г) 144    Д) никое от тези

8. Даден е куб с ръб 1, а  $A$  е негов връх. От останалите 7 върха по случаен начин е избран един, който е означен с  $X$ . Каква е вероятността отсечката  $AX$  да е по-дълга от 1?

- А)  $\frac{3}{8}$     Б)  $\frac{3}{7}$     В)  $\frac{1}{2}$     Г)  $\frac{4}{7}$     Д)  $\frac{5}{8}$

9. Кои са стойностите на параметъра  $m$ , за които уравнението  $x^4 - 2x^2 + m = 0$  има 4 различни реални корена?

- А)  $m \in (-\infty; 1)$     Б)  $m \in (-1; +\infty)$     В)  $m \in (-\infty; 0)$   
Г)  $m \in (-1; 1)$     Д) никое от тези

10. Какво ще бъде отпечатано в резултат от изпълнението на програмата, когато се въведе 4?

въведи  $n$

$x := 8; y := 1; z := 0; h := 1/n$

докато  $y > z$  изпълнявай

$(x := x - h; y := z; z := x^2 - 9x + 8; )$

отпечатай  $x$

- А) 5    Б) 4,75    В) 4,5    Г) 4,25    Д) 4

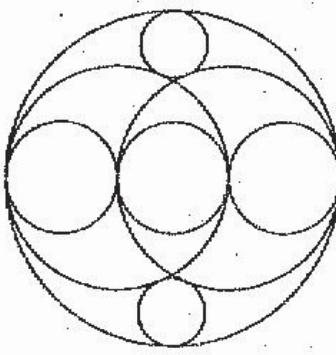
11. Какво е написал известният автор Феодоровъч доинекъ, работил в Преславската книжовна школа в края на IX и началото на X век?

- А) Якоименъ    Б) Якоименъ    В) Якоименъ  
Г) Якоименъ    Д) Якоименъ

12. Колко са числата, ненадвишаващи 2011, които са както сума на две последователни естествени числа, така и сума на четири последователни естествени числа?

- А) по-малко от 100    Б) между 100 и 200  
В) между 200 и 300    Г) между 300 и 400  
Д) повече от 400

13. Фигурата на чертежа представя външна окръжност с радиус 1, в която са разположени седем окръжности: две еднакви големи, три еднакви средни и две еднакви малки, които се допират, както е показано. На колко е равен събрът от радиусите на седемте окръжности?

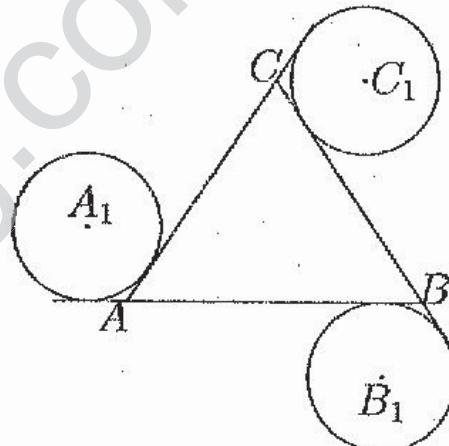


- A)  $\frac{41}{15}$     Б)  $\frac{35}{12}$     В)  $\frac{49}{30}$     Г)  $\frac{67}{24}$     Д) никое от тези

14. Ако  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ , то колко пъти графиката на функцията  $y = f(f(x))$  пресича абсцисната ос?

- А) 1    Б) 2    В) 3    Г) 4    Д) не я пресича

15. Даден е равностранен  $\triangle ABC$  със страна 6. Окръжности с центрове  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и радиуси, равни на  $\sqrt{3}$ , се допират до страните му и до техни продължения, както е показано на чертежа. На колко е равно лицето на  $\triangle A_1B_1C_1$ ?



- А) 21    Б) 24    В)  $16\sqrt{3}$     Г)  $16\sqrt{2}$     Д)  $12\sqrt{3}$

16. Функцията  $f(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , за всеки две реални числа  $x_{1,2}$  удовлетворява равенството  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$  и графиката на  $f(x)$  има обща точка с абсцисната ос. На колко е равно  $f(2011)$ ?

- А) 1    Б) 2011    В)  $e^{2011}$     Г)  $\ln 2011$     Д) никое от тези

17. Разглеждаме трицифрените числа с неповтарящи се цифри, които могат да бъдат образувани, като се използват само цифрите 2, 3, 4 и 5. Каква е вероятността случайно избрано число измежду тях да е кратно на 3?

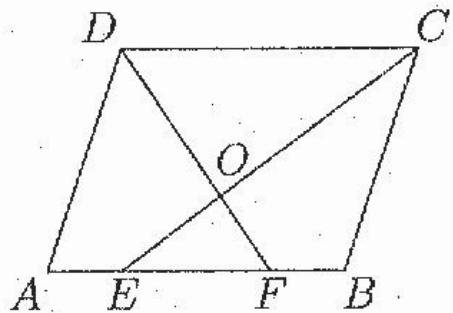
- А)  $\frac{1}{2}$     Б)  $\frac{1}{3}$     В)  $\frac{1}{4}$     Г)  $\frac{1}{6}$     Д) никое от тези

18. Коя е цифрата на единиците на сума  $2011_{(3)} + 2011_{(4)}$ , записан в петична бройна система?

- А) 4    Б) 3    В) 2    Г) 1    Д) 0

19. Даден е успоредник  $ABCD$  със страни  $AB = 4$  и  $BC = 3$ . Ъглополовящите на ъглите  $BCD$  и  $CDA$  се пресичат в точка  $O$  и пресичат  $AB$  съответно в  $E$  и  $F$ . На колко е равно отношението на лицата на триъгълниците  $EFO$  и  $CDO$ ?

- А) не е определено еднозначно    Б)  $\frac{3}{4}$     В)  $\frac{1}{2}$     Г)  $\frac{1}{3}$     Д)  $\frac{1}{4}$



20. На колко е равен сборът на периодичните дроби  $0, \overline{(2011)} + 0, 0\overline{(2011)}$ ?

- А)  $\frac{2011}{9999}$     Б)  $\frac{2011}{9090}$     В)  $\frac{2011}{9900}$     Г)  $\frac{2011}{9009}$     Д) никое от тези

21. По колко различни начина могат да бъдат разпределени 11 еднакви пици между 4 ученици (без да се режат), така че за всеки ученик да има пица?

- А) 720    Б) 440    В) 360    Г) 240    Д) 120

22. За всеки ъгъл  $\alpha \in (0; 180^\circ)$  определяме chord  $\alpha$  като дължината на основата на равнобедрен триъгълник с бедра 1 и ъгъл  $\alpha$  между бедрата. Как се изразява chord  $2\alpha$  чрез chord  $\alpha$  за  $\alpha \in (0; 90^\circ)$ ?

- А)  $\frac{\text{chord} \alpha}{\sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}}$     Б)  $\text{chord} \alpha \sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}$     В)  $\sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}$   
 Г)  $\frac{1}{\sqrt{4 - \text{chord}^2 \alpha}}$     Д) никое от тези

23. Какъв остатък дава сумата

$$1^{2010} + 2^{2010} + 3^{2010} + \dots + 2011^{2010}$$

при деление на 2011?

- А) 1    Б) 2010    В) 1005    Г) 1006    Д) никое от тези

24. Колко са двуцифрените числа  $\overline{xy}$ , такива че сборът на трицифрените числа  $\overline{x}y\overline{x}$  и  $\overline{y}x\overline{y}$  има точно 8 делителя?

- А) 27    Б) 34    В) 49    Г) 51    Д) никое от тези

25. По колко начина могат да се оцветят ръбовете на правилен тетраедър в 6 цвята, като две оцветявания на тетраедъра ще считаме за еднакви, точно когато единото преминава в другото при завъртане на тетраедъра? (Правилен тетраедър е триъгълна пирамида с равни ръбове.)

- А) 720    Б) 240    В) 120    Г) 60    Д) 30

26. На колко е равен сборът от първите 10 и последните 10 елемента в списъка, отпечатан от програмата

въведи n

fs:={0,1}

за i от 1 до n и за j от 0 до i изпълнявай

(k:=1; докато j/i>fs(k) изпълнявай k:=k+1;

ако j/i<fs(k) то вмъкни j/i на позиция k в fs)  
отпечатай fs

при въвеждане на 20?

- А)  $\frac{21162959}{21162960}$     Б)  $\frac{2763}{1980}$     В) 1    Г) 10    Д) 20

Уточнение. fs(k) е k-ият елемент в списъка fs.

27. В пространството е дадена правоъгълна координатна система. Всяка точка с цели координати е оцветена в един от n възможни цвята. Всеки две точки, намиращи се на разстояние под 1,5 една от друга, са разноцветни. Да се определи най-малката възможна стойност на n.

- А) 2    Б) 3    В) 4    Г) 6    Д) 8

28. Ще считаме, че една точка лежи в парабола, ако е от отсечка, чиито краища лежат на параболата. Какъв е минималният брой параболи, с които може да се покрие равнината, т.е. всяка точка от равнината да се окаже в някоя от покриващите параболи? (Оста на параболата може да бъде произволна права.)

- А) 3    Б) 4    В) 6    Г) 8    Д) никое от тези

29. Нека  $A = \{2^x 3^y 5^z : x, y, z \in \{0; 1; 2\}\}$ . Подмножеството  $B \subset A$  ще се нарича *неразделно*, ако не съществуват два различни негови елемента, единият от които да дели другия. Колко елемента най-много може да има едно неразделно множество?

- А) 5    Б) 6    В) 7    Г) 8    Д) 9

30. На долнния чертеж има двадесет полета.

M											T

В горното ляво поле е кацаляла муха (M). От дадено поле мухата може да се премести в полето под него, в полето вдясно от него или в полето, което се намира по диагонал нагоренадясно от него. В кой от интервалите е броят на маршрутите, по които мухата може да стигне до тортата T в долното дясното поле?

- А) [10; 100]    Б) [100; 1000]    В) [1000; 100000]  
 Г) [100000; 1000000]    Д) [1000000; 1000000000]