

# МАТЕМАТИКА ЗА ВСЕКИ

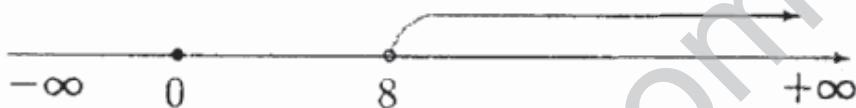
В ПОМОЩ НА ВСИЧКИ УЧАЩИ СЕ И НА ТЕХНИТЕ РОДИТЕЛИ И УЧИТЕЛИ

XVI МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР "ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАВЪР"  
Задачи за 11 - 12 клас (2007 г.)

1. Кое от следните неравенства е достатъчно условие, за да твърдим, че  $x > 1$ ?

- А)  $x^7 > x^4$    Б)  $x^7 > x^5$    В)  $x^8 > x^4$    Г)  $x^6 > x^5$   
Д) никое от тези

2. Решенията на кое неравенство са изобразени на чертежа?



- А)  $\lg x > 8$    Б)  $\log_2 \frac{1}{x} < -3$    В)  $\log_4 \frac{1}{x} < -32$    Г)  $\log_8 x \geq 1$   
Д) никое от тези

3. Сборът на 334 последователни нечетни числа е  $334 \cdot 336$ . На колко е равно произведението на най-малкото и най-голямото измежду тези числа?

- А) 671   Б) 2007   В) 3335   Г) 4655 .   Д) ниое от тези

4. Трапец с основи 12 и 18 е разделен от диагоналите си на четири триъгълника, два от които имат лице по 150. Намерете лицето на трапеца.

- А) 600   Б) 625   В) 525   Г) 575   Д) никое от тези

5. Ако  $\sqrt{5x} + \sqrt{3y} = 21$  и  $\sqrt{20x} - \sqrt{12y} = 18$ , то  $x + y =$   
А) 54   Б) 57   В) 60   Г) 63   Д) никое от тези

6. В равнобедрен трапец е вписана окръжност. Намерете дължината на окръжността, ако основите на трапеца имат дължини 36 и 64.

- А)  $48\pi$    Б)  $64\pi$    В)  $72\pi$    Г)  $96\pi$    Д) никое от тези

7. Ако  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ , то  $(3 + \sin x)^2 + (3 + \cos x)^2 =$   
А) 16   Б) 20   В) 22   Г) 25   Д) никое от тези

8. Кое е най-малкото от числата

- А)  $\sin 6^\circ$    Б)  $\sin 6^\circ$    В)  $(\sin 6\%)$    Г)  $(\sin 6^\circ)\%$    Д)  $\sin(6\%)$ ,  
ако навсякъде процентите са от 1?

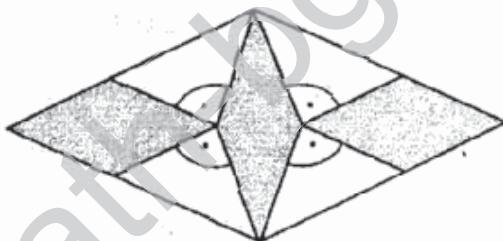
9. За  $\triangle ABC$  е дадено  $AB = 1$ ,  $BC = \sqrt{2}$  и  $\angle BCA = 30^\circ$ .  
Колко градуса може да бъде  $\angle BAC$ ?

- А)  $60^\circ$    Б)  $30^\circ$  или  $150^\circ$    В)  $36^\circ$  или  $72^\circ$    Г)  $45^\circ$  или  $135^\circ$   
Д) няма такъв триъгълник

10. Дадени са окръжност и две пресичащи се хорди в нея. Пресечната точка дели едната хорда в отношение  $2 : 3$ , а другата – в отношение  $3 : 4$ . Намерете отношението на по-голямата към по-малката хорда.

- А)  $7 : 5$    Б)  $49 : 25$    В)  $9 : 8$    Г)  $2 : 1$    Д) никое от тези

11. Ако трите затъмнени ромба на чертежа са еднакви и всеки от тях има лице 1, то на колко е равно лицето на големия ромб, от който малките са част (отбелязаните ъгли са прави)?



- А)  $\frac{3 + \sqrt{2}}{2}$    Б)  $3 + 4\sqrt{2}$    В)  $6 + 2\sqrt{2}$    Г)  $3 + \sqrt{2}$

Д) никое от тези

12. Каква е вероятността случайно избрано естествено число, по-малко от 2007, да не е кратно нито на 3, нито на 4, нито на 5?

- А)  $\frac{804}{2007}$    Б)  $\frac{1070}{2007}$    В)  $\frac{803}{2006}$    Г)  $\frac{985}{2006}$    Д) никое от тези

13. Най-рано след колко години записът на годината в двоична система ще се чете по един и същи начин отзад напред и отпред назад?

- А) 4   Б) 8   В) 16   Г) 32   Д) никое от тези

14. Една мравка, снабдена с черна боя, пълзи по ръбовете на бяла правилна петоъгълна пирамида. Всеки от тези ръбове е с дължина 1 м. Какъв е най-краткият път, който може да измине мравката, за да боядиса всички ръбове черни, без да цапа останалата повърхност на пирамидата?

- А) 11 м    Б) 12 м    В) 13 м    Г) 14 м    Д) никой от тези

15. Медианата през върха  $A$  в  $\triangle ABC$  сключва със страните  $AB$  и  $AC$  ъгли, съответно равни на  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . На колко е равно отношението  $AB : AC$ ?

- А)  $\sqrt{2}$     Б)  $\sqrt{3}$     В)  $\frac{3}{2}$     Г)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$     Д) никое от тези

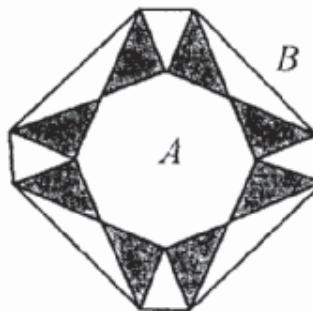
16. Функцията  $f(x)$  удовлетворява равенството

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 + x - x^2}{x} \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

На колко е равно  $f(2007)$ ?

- А)  $\frac{2006}{2007}$     Б)  $\frac{2008}{2007}$     В)  $\frac{2007}{2006}$     Г)  $\frac{2007}{2008}$     Д) никое от тези

17. На страните на правилния осмоъгълник  $A$  са построени равнобедрени правоъгълни триъгълници, както е показано на чертежа.



Ако се свържат последователно върховете на триъгълниците, които не са върхове на  $A$ , се получава осмоъгълник  $B$ . На колко е равен периметърът на  $B$ , ако страната на  $A$  е 1

А)  $4\sqrt{10 + \sqrt{2}}$     Б)  $8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$     В)  $16 + 8\sqrt{2}$     Г)  $4\sqrt{14 + \sqrt{2}}$   
Д) никое от тези

**18.** Ако  $a_n$  е цифрата на единиците на  $n^{2007}$ , то кое от числата

- А)  $a_2$    Б)  $a_3$    В)  $a_4$    Г)  $a_5$    Д)  $a_6$

е най-голямо?

**19.** Колко са общите членове на аритметичните прогресии  $\{1; 5; \dots\}$  и  $\{2; 5; \dots\}$ , които не надминават 2007?

- А) не повече от 150   Б) между 150 и 170  
В) между 170 и 200   Г) между 200 и 250  
Д) повече от 250

**20.** Колко са двойките естествени числа  $(m; n)$ , за които  $m^3 + n^3 = (m + n)^2$ ?

- А) 0   Б) 1   В) 2   Г) 3   Д) повече от 3

**21.** В куб с ръб 10 е пробит тунел с квадратно сечение, така че всяка стена на тунела е успоредна на някоя стена на куба. Числените стойности на обема и пълната повърхнина на полученото тяло са равни. Намерете този обем.

- А) 625   Б) 650   В) 675   Г) 725   Д) никое от тези

**22.** Окръжност е разбита на 47 дъги от 20 сини и 27 червени точки. На дъга със сини краища се записва 4, на дъга с червени краища се записва 9 и на дъга с разноцветни краища се записва 6. Колко са възможните произведения на всички записани числа?

- А) 540   Б) 48   В) 47   Г) 7   Д) никое от тези

**23.** По случаен начин избираме подмножество на множеството  $\{1; 2; 3; 4; \dots; 2007\}$  което има 2005 елемента. Каква е вероятността сборът от елементите на такова подмножество да бъде 2015 021?

- А)  $\frac{1}{671\,007}$    Б)  $\frac{1}{4\,026\,042}$    В)  $\frac{1}{17\,635\,421}$    Г)  $\frac{1}{204\,261\,524}$   
Д) никоя от тези

**24.** На много дълга сламка кацнали скакалците  $A$ ,  $B$  и  $C$  в този ред. От време на време някой скакалец прескача един свой съсед. Например, след първия скок е възможно само някое от двете разположения  $BAC$  (когато  $A$  прескача  $B$  или  $B$  прескача  $A$ ) и  $ACB$  (когато  $C$  прескача  $B$  или  $B$  прескача  $C$ ). Кое разположение НЕ може да се постигне с точно 2007 скока?

- А)  $ACB$
- Б)  $CBA$
- В)  $BAC$
- Г)  $CAB$
- Д) всяко от изброените е възможно

**25.** При въвеждането на коя от стойностите

- А) 3
- Б) 5
- В) 8
- Г) 13
- Д) 21

в резултат от изпълнението на програмния фрагмент

въведи  $n$

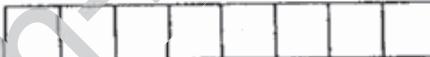
$x := 0; y := -10; z := 0; h := 1/n$

докато  $y < z$  изпълнявай

$(x := x + h; \quad y := z; \quad z := -x^2 + 11x - 10; )$

отпечатай  $y$

ще бъде отпечатано най-голямо число?

**26.** В таблицата  четири от клетките са оцветени по случаен начин в синьо, зелено, червено и жълто, така че няма съседни оцветени клетки и са използвани и четирите цвята. Каква е вероятността първата (лявата) клетка да е синя?

- А)  $\frac{1}{4}$
- Б)  $\frac{1}{5}$
- В)  $\frac{1}{24}$
- Г)  $\frac{1}{120}$
- Д) никоя от тези

**27.** Ако  $a, b, c$  са положителни числа, кое от следните неравенства може да НЕ Е вярно?

- А)  $(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$
- Б)  $a^2bc + b^2ca + c^2ab \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$
- В)  $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a + b + c)$
- Г)  $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq 3$
- Д)  $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \leq a^6 + b^6 + c^6$

**28.** Правилен зар се хвърля три пъти. Получените точки са  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (в този ред). Каква е вероятността да имаме  $x < y < z$ ?

- A)  $\frac{1}{6}$    Б)  $\frac{5}{54}$    В)  $\frac{5}{27}$    Г)  $\frac{4}{27}$    Д) никое от тези

**29.** Кое от числата

- А) 0   Б) 1   В) 5   Г) 100   Д) 100!

е най-добро приближение за резултата от изпълнението на следния програмен фрагмент:

```
x := 1; y := 1;  
за n от 1 до 100 изпълнявай  
  (x := x * n;  y := y * 5;  z := y/x;  n := n + 1)  
отпечатай z
```

**30.** Определете автора на кодирания по-долу откъс, като знаете, че буквите от кирилицата в множеството {а, и, ъ} са кодирани с буквите {и, у, а} (редът не е непременно зададеният), а пунктуацията не е кодирана.

Qasus na by gy fivusu,  
by j ikvenu qmvda qms,  
qasus na by gy j fybesu,  
ci tuj nole tu cdysms.

- А) Иван Вазов   Б) Добри Чинтулов   В) Христо Ботев  
Г) Пейо Яворов   Д) Елисавета Багряна