ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
16. 04. 2011 г.

РЕШЕНИЯ
ПЪРВИ ВАРИАНТ

ЗАДАЧА 1: а) Да се реши уравнението $|1+2x| = x^2 + x - 1$.

б) Да се реши уравнението $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0$.

в) Да се намери седмият член на намаляваща геометрична прогресия, ако сумата на първите три члена е 7, а произведението им е 8.

РЕШЕНИЕ: **а) (2 точки)** По дефиниция $|1+2x| = \begin{cases} 1+2x, & 1+2x \ge 0 \\ -(1+2x), & 1+2x < 0 \end{cases}$.

При $x \ge -\frac{1}{2} \Rightarrow 1+2x = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \in$ Д.М. е решение, а $x_2 = -1 \notin$ Д.М.

При $x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -1-2x = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x_3 = -3 \in$ Д.М. е решение, а $x_4 = 0 \notin$ Д.М.

б) (2 точки) $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0 \Rightarrow 3.3^{2x} - 4.3^x + 1 = 0$. Полагаме $3^x = t \Rightarrow t > 0$ и получаваме

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1 \\ t_2 = 1 > 0 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0. \end{cases}$$

в) (2 точки) Д.М. $a_1 \ne 0,\ q \in (0;1)$. Но $\left| \begin{array}{r} a_1 + a_2 + a_3 = 7 \\ a_1 a_2 a_3 = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 \\ a_1^3 q^3 = 2^3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} a_1\left(1+q+q^2\right) = 7 \\ a_1 q = 2 \end{array} \right.$.

След деление на първото уравнение на системата с второто $(a_1, q \ne 0)$ получаваме

$$\frac{1+q+q^2}{q} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q_1 = 2 \notin \text{Д.М.},\ q_2 = \frac{1}{2} \in \text{Д.М.} \Rightarrow a_1 = 4 \Rightarrow a_7 = a_1 q^6 = \frac{1}{16}.$$

ЗАДАЧА 2: Дадена е функцията $f(x) = x^2 - 2p(x-1) - 1$, където p е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на параметъра p, за които сумата от корените на уравнението $f(x) = 0$ е равна на сумата от квадратите на корените.

б) При p=1 да се реши уравнението $f\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 4$.

РЕШЕНИЕ: **а) (2 точки)** $f(x) = x^2 - 2px + 2p - 1,\ x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

От формулите на Виет $\Rightarrow x_1 + x_2 = 2p,\ x_1x_2 = 2p - 1 \Rightarrow 2p^2 - 3p + 1 = 0 \Rightarrow p_1 = 1,\ p_2 = \frac{1}{2}$.

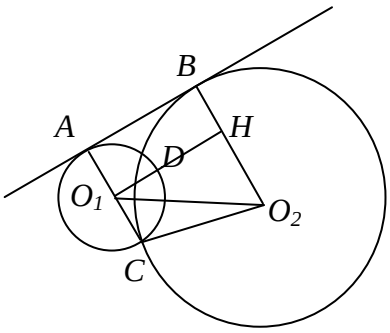
math-bg.com

б) (2 точки) При $p=1$ $f(x)=x^2-2x+1 \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}+1=4.$ Полагаме $\cos\frac{\alpha}{2}=t,\ t\in[-1;1]\Rightarrow$

$t^2-2t-3=0\Rightarrow t_1=3\notin[-1;1],\ t_2=-1\in[-1;1]\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=-1\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=(2k+1)\pi\Rightarrow\alpha=2(2k+1)\pi,\ k\in Z.$

ЗАДАЧА 3: Дадени са окръжности k_1 и k_2 с центрове O_1 и O_2 и радиуси съответно 3 и 7. Нека C и D са пресечните им точки, а A и B - допирните точки до общата допирателна съответно към k_1 и k_2, като A, B и D са от една и съща страна на O_1O_2. Да се намери лицето на триъгълника ABC, ако $O_1O_2=8$.

РЕШЕНИЕ: **(4 точки)** Построяваме $O_1H\perp O_2B\Rightarrow O_2H=O_2B-BH=4.$ От $\Delta O_1O_2H\Rightarrow$



$O_1H=\sqrt{O_1O_2^2-O_2H^2}=4\sqrt{3}\Rightarrow AB=4\sqrt{3}.$

От $\Delta O_1O_2H\,(O_2H=4,\ O_1O_2=8)\Rightarrow\angle HO_1O_2=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle O_1O_2H=\frac{\pi}{3}.$

От ΔO_1CO_2 по косинусова теорема

$\cos\angle CO_1O_2=\frac{CO_1^2+O_1O_2^2-CO_2^2}{2.CO_1.O_1O_2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\angle CO_1O_2=\frac{\pi}{3}\Rightarrow O_2H\|CO_1\Rightarrow CO_1\perp AB.$ Но $O_1A\perp AB\Rightarrow CA\perp AB,$ т.е. $O_1\in AC.$

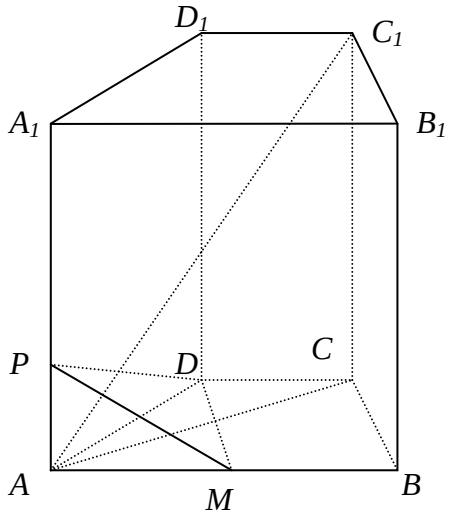
Тогава $AC=6$ и $S_{\Delta ABC}=\frac{AB.AC}{2}=12\sqrt{3}.$

ЗАДАЧА 4: Дадена е права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основа равнобедрен трапец. Нека $AB||CD,\ AB=4a,\ CD=2a,\ AA_1=4a$ и тангенсът на ъгъла между диагонала AC_1 и равнината на основата е $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Да се намерят:

а) обемът на призмата;

б) периметърът на сечението на призмата с равнина λ, минаваща през средата на AB и перпендикулярна на AC_1.

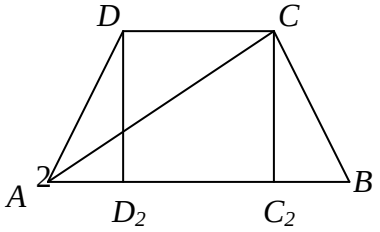
РЕШЕНИЕ: **а) (2 точки)** Тъй като C е ортогонална проекция на C_1 върху равнината



$ABCD\Rightarrow\angle[AC_1,(ABCD)]=\angle C_1AC.$ От $\Delta ACC_1\Rightarrow$

$\frac{CC_1}{AC}=\mathrm{tg}\angle C_1AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AC=2a\sqrt{3}.$ (1)

Построяваме $CC_2\perp AB,\ DD_2\perp AB.$



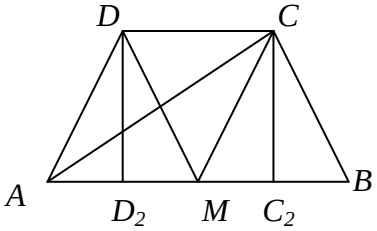
math-bg.com

От равнобедрения трапец $ABCD \Rightarrow \Delta AD_2D \cong \Delta BC_2C \Rightarrow AD_2 = C_2B = \dfrac{AB - CD}{2} = a.$

От $\Delta AC_2C \Rightarrow C_2C = \sqrt{AC^2 - AC_2^2} = a\sqrt{3}.$ От $\Delta BC_2C \Rightarrow BC = \sqrt{CC_2^2 + C_2B^2} = 2a = AD.$ (2)

Тогава $S_{ABCD} = \dfrac{AB + CD}{2}.CC_2 = 3a^2\sqrt{3} \Rightarrow V = S_{ABCD}.AA_1 = 12a^3\sqrt{3}.$

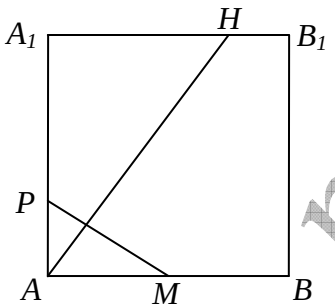
б) (4 точки) Означаваме с M средата на AB. Построяваме през M права, перпендикулярна на AC. Означаваме с N пресечната точка на правата с AD.



По теоремата за трите перпендикуляра $\Rightarrow MN \perp AC_1 \Rightarrow \lambda \cap (ABCD) = MN$. От (2) и $AM = MB = 2a \Rightarrow AMCD$ е ромб $\Rightarrow AC \perp MD \Rightarrow$ точката $N \equiv D$. Построяваме $C_1H \perp A_1B_1 \Rightarrow$ H е ортогонална проекция на C_1 върху равнината ABB_1A_1.

Построяваме в равнината ABB_1A_1 права $MP \perp AH$ $(P \in AA_1)$. По теоремата за трите перпендикуляра $\Rightarrow MP \perp AC_1 \Rightarrow \lambda \cap (ABB_1A_1) = MP \Rightarrow$ сечението е ΔMDP.

От $MBCD$ успоредник $(AB \parallel CD,\ MB = CD = 2a)$ $\Rightarrow BC = DM = 2a.$ От $\Delta AHA_1 \Rightarrow$



$AH = \sqrt{AA_1^2 + A_1H^2} = 5a.$ Разглеждаме $\Delta MPA \sim \Delta AHA_1$

$(\angle A_1HA = \angle MPA,$ допълващи $\angle A_1AH$ до $\dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$$\frac{MP}{AH} = \frac{MA}{AA_1} = \frac{AP}{HA_1} \Rightarrow \frac{MP}{5a} = \frac{2a}{4a} = \frac{AP}{3a} \Rightarrow MP = \frac{5a}{2}, AP = \frac{3a}{2}.$$

От ΔPAD $\left(\angle PAD = \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow PD = \sqrt{AP^2 + AD^2} = \dfrac{5a}{2}.$

Тогава периметърът на ΔMDP е $MD + DP + PM = 7a.$

Оценката се образува по формулата

***Оценка* = 2 + 0,2 *k*,**

където k е сумата на получените точки.

math-bg.com