



НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА  
ГИМНАЗИЯ  
„АКАД. Л. ЧАКАЛОВ”

**Задача 1.** Намерете числената стойност на израза  $3c + cb - c^2 + b^2 + b^3c^2 - c^5$  за  $c = b = -3$ .

**Решение:**

I-ви начин:

1. Представяне  $3c + cb + b^2 - c^2 + c^2(b^3 - c^3)$ .
2. Съобразяване на  $b^2 - c^2 = 0$  и  $b^3 - c^3 = 0$ , защото са равни.
3. Пресмятане на  $bc = 9$ .
4. Верен отговор 0.

II-ри начин:

При пряко заместване:

$$(-3)^2 = 9.$$

$$(-3)^3 = -27.$$

$$(-3)^5 = -243.$$

Довършване и получаване на отговор 0.

**Задача 2.** Да се реши уравнението  $\frac{4-x}{-4} + \frac{2x-15}{3} = \frac{3x+4}{8}$ .

**Решение:**

След еквивалентни преобразувания получаваме

$$-24 + 6x + 16x - 120 = 9x + 12.$$

Тогава уравнението добива вида

$$13x = 156, \text{ откъдето получаваме } x = 12.$$

math-bg.com

**Задача 3.** Да се реши уравнението  $\left|(-2x+1)^2 - x(4x-5)\right| = B$ , където

$$B = \frac{2^{n+3}}{2^n + 2^n + 2^n + 2^n} (n \in \mathbb{N}).$$

**Решение:**

$$B = \frac{2^{n+3}}{4 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = 2$$

Тогава уравнението добива вида

$$\left|1 - 4x + 4x^2 - 4x^2 + 5x\right| = 2, \text{ което е еквивалентно с}$$

$$|x+1| = 2$$

**I сл.)**  $x+1=2$ , т.е.  $x_1=1$

**II сл.)**  $x+1=-2$ , т.е.  $x_2=-3$

math-bg.com

**Задача 4.** Да се докаже, че ако  $a$  е най-малкото цяло решение на неравенството

$$\frac{9x+5}{4} - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{3-2x}{9} \right) - 7x < 0,$$

то неравенствата

$$(12x+a)(a-x) + (3x-2)^2 - 3x(7-x) + 17a < 0 \text{ и } x > 1$$

са равносилни.

**Решение:**

$$\frac{9x+5}{4} - 1 + \frac{3-2x}{18} - 7x < 0 \quad / \cdot 36$$

$$9(9x+5) - 36 + 2(3-2x) - 36 \cdot 7x < 0$$

$$81x + 45 - 36 + 6 - 4x - 252x < 0$$

$$175x > 15$$

$$x > \frac{15}{175}$$

Намиране, че най-малкото цяло решение  $a=1$ .

$$(12x+1)(1-x) + (3x-2)^2 - 3x(7-x) + 17 < 0$$

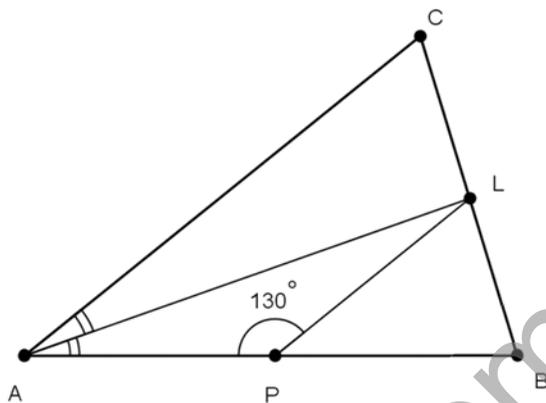
$$11x - 12x^2 + 1 + 9x^2 - 12x + 4 - 21x + 3x^2 + 17 < 0$$

$$22x > 22$$

$$x > 1$$

**Задача 5.** В  $\triangle ABC$  е построена ъглополовящата  $AL$ . Правата през  $L$ , която е успоредна на  $AC$  пресича страната  $AB$  в точка  $P$ . Да се намерят ъглите на  $\triangle ABC$ , ако  $\sphericalangle APL = 130^\circ$  и  $\sphericalangle ACB : \sphericalangle ABC = 3 : 2$ .

**Решение:**



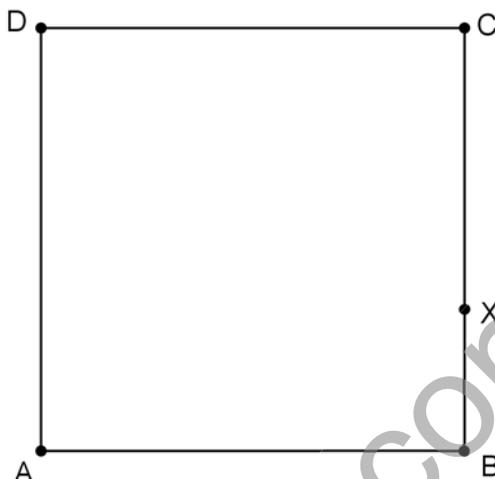
Нека  $\sphericalangle ACB = 3x$ , а  $\sphericalangle ABC = 2x$ . Тогава от  $(AC \parallel PL) \times AB$  следва, че  $\sphericalangle CAB + 130^\circ = 180^\circ$ , т.е.  $\sphericalangle CAB = 50^\circ$ .

От теоремата за сбор на ъглите в  $\triangle ABC$  имаме, че  $5x + 50^\circ = 180^\circ$ , откъдето  $x = 26^\circ$ .

Следователно  $\sphericalangle ACB = 78^\circ$  и  $\sphericalangle ABC = 52^\circ$ .

**Задача 6.** Двама бегачи се движат по квадрат  $ABCD$  в различни направления с постоянна скорост. Когато стартират от върха  $A$ , единият достига  $B$ , когато другият достига  $C$  без да са се срещали. Ако страната на квадрата е 30 м, то на колко метра е равно разстоянието от точката на срещата им до върха  $B$ .

**Решение:**



1. Определяне, че едната скорост е два пъти по-голяма от другата.  
/Например:  $AB + DC = 2AB$ . Понеже времето е едно и също, скоростта е два пъти по-голяма./
2.  $CB$  се разделя в отношение 2:1 считано от  $C$  или 1:2 считано от  $B$ .  
( когато по-бързия е в  $C$ , а по-бавният в  $B$  те започват да се движат по страната  $BC$  в противоположни посоки и понеже съотношението на скоростите е 1:2, а до момента на срещата изминава еднакво време, то и изминатите от тях разстояния се отнасят както 1:2 )
3. Ако  $X$  е точката на срещане,  $BX = 10$ . ( понеже  $CX = 2BX$ , а  $CX + BX = BC = 30$ , то  $BX = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$  )

**Задача 7.** Две фирми произвеждат общо 720 чифта обувки на ден. Първата фирма увеличава дневната си производителност с 15%, а втората – с 10% и те вече произвеждат общо 807 чифта обувки за един ден. Намерете по колко чифта обувки на ден произвежда всяка от фирмите, след като увеличили производителността си.

**Решение:**

Нека  $x(x > 0)$  е производителността на първата фирма преди увеличението, тогава производителността на втората фирма е  $720 - x$ . След като увеличили производителностите си, производителността на първата фирма е  $x + \frac{15}{100}x$ , а на втората е  $720 - x + \frac{10}{100}(720 - x)$ . Тогава съставяме уравнението

$$x + \frac{15}{100}x + 720 - x + \frac{10}{100}(720 - x) = 807,$$

откъдето получаваме, че производителността на първата фирма преди увеличението е  $x = 300$  чифта обувки на ден, а производителността на втората е 420 чифта обувки. Така след като увеличава производителността си първата фирма произвежда по 345 чифта обувки на ден, а втората по 462 чифта обувки на ден.

**Задача 8.** Да се докаже, че за всяко естествено число  $n$ , числото  $m = \frac{10^n + 65}{15}$  е цяло.

**Решение:**

I-ви начин:

1.  $\frac{10^n + 65}{15} = \frac{10^n + 5 + 60}{15} = \frac{10^n + 5}{15} + 4.$

2.  $10^n + 5$  се дели на 5.

3.  $10^n + 5 = 10 \dots 05$  и се дели на 3 по признак за делимост.

4. Ако едно число се дели и на 3, и на 5, то числото се дели на 15, понеже 3 и 5 са прости числа.

II-ри начин:

1.  $10^n + 65 = 1000 \dots 65.$

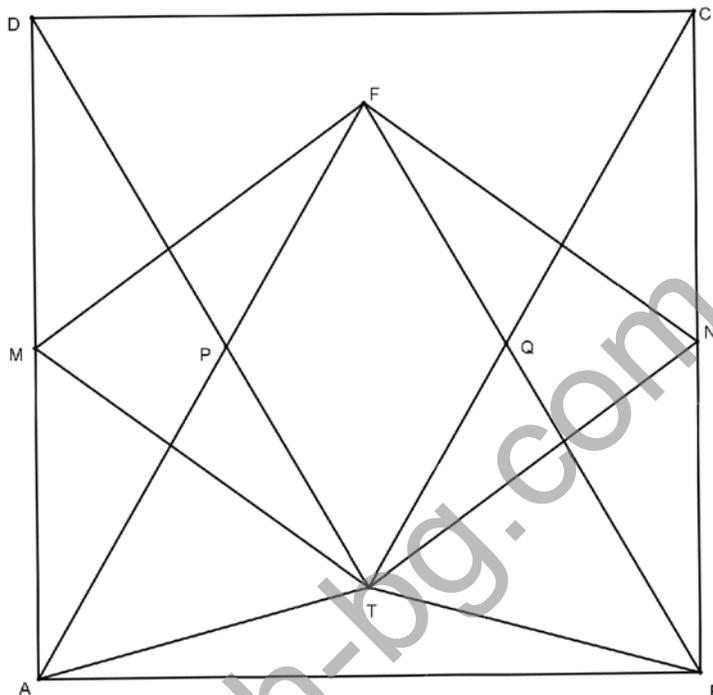
2.  $m$  се дели на 5 по признак за делимост.

3.  $m$  се дели на 3 по признак за делимост.

4. Ако едно число се дели и на 3, и на 5, то числото се дели на 15, понеже 3 и 5 са прости числа.

**Задача 9.** Даден е квадратът  $ABCD$ . Построени са равностранните триъгълници  $ABF$  и  $CDT$  по такъв начин, че  $F$  и  $T$  са вътрешни точки за квадрата. Ако  $M$  и  $N$  са съответно средите на  $AD$  и  $BC$ , да се докаже, че  $MTNF$  е ромб.

**Решение:**



I-ви начин:

1. Точките  $M, N$  - среди съответно на  $AD$  и  $BC$  и  $ABCD$  е квадрат  $\Rightarrow AD = BC$ .

От двете неща следва, че  $AM = MD = BN = NC = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$ .

2.  $\triangle ABF$  - равностранен  $\Rightarrow AF = BF = AB$ . Аналогично  $\triangle DCT \Rightarrow DT = CT = DC$  и следователно  $AF = BF = DT = CT$ .

3.  $ABCD$  е квадрат  $\Rightarrow \sphericalangle DAB = 90^\circ$ .  $\triangle ABF$  - равностранен  $\Rightarrow \sphericalangle FAB = 60^\circ$ .  
 $\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAB - \sphericalangle FAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Аналогично  $\sphericalangle FBC = \sphericalangle BCT = \sphericalangle ADT = 30^\circ$ .

4. Разглеждаме  $\triangle AMF$  и  $\triangle BNF$

1.  $AM = BN$

2.  $AF = BF$

3.  $\sphericalangle MAF = \sphericalangle NBF = 30^\circ \Rightarrow \triangle AMF \cong \triangle BNF$  по I-ви признак.

Аналогично  $\triangle AMF \cong \triangle DMT \cong \triangle CNT \Rightarrow MF = NF = TM = TN \Rightarrow MTNF$  е ромб

II-ри начин:

Доказателство, че  $TPFQ$  е успоредник:

1.  $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CTD$ .
2.  $\triangle BQC \cong \triangle AQD$ .
3.  $\sphericalangle BQC = \sphericalangle TQF$  и  $\sphericalangle APD = \sphericalangle TPF$  (върхни).
4.  $TPFQ$  е успоредник (две двойки равни срещуположни ъгли).

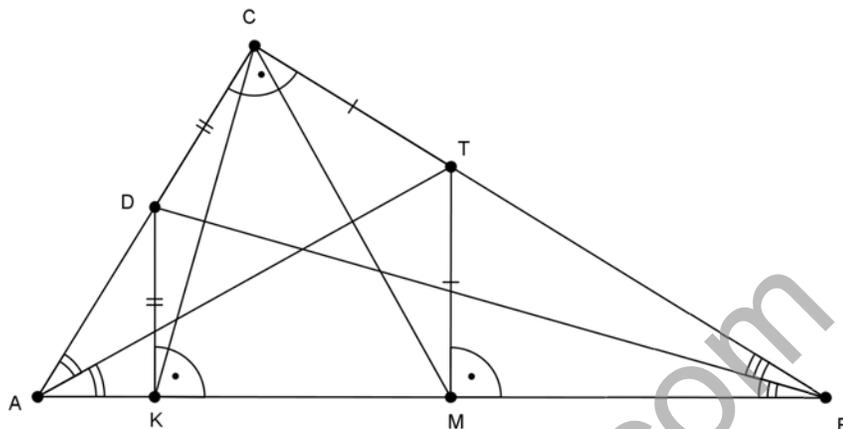
Доказателство, че две съседни страни на успоредника са равни:

1.  $BQ = AP$  (от еднаквост на триъгълници).
2.  $BF = AF$  (по условие).
3.  $FQ = BF - BQ = AF - AP = FP$ .

math-bg.com

**Задача 10.** В правоъгълния триъгълник  $ABC$  ( $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ ) са прекарани ъглополовящите  $BD$  и  $AT$  ( $D \in AC, T \in BC$ ). Отсечките  $DK$  и  $TM$  са перпендикулярни на хипотенузата  $AB$  ( $K \in AB, M \in AB$ ). Да се намери  $\sphericalangle KCM$ .

**Решение:**



От  $BD$  – ъглополовяща на  $\sphericalangle ABC$  имаме, че  $DK = DC$  (като разстояния от точка  $D$  до раменете на ъгъла). Аналогично от  $AT$  – ъглополовяща на  $\sphericalangle BAC$  имаме, че  $TM = CT$ . Нека  $\sphericalangle CAB = \alpha$ , тогава  $\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha$ ,  $\sphericalangle CDK = 90^\circ + \alpha$  (външен ъгъл за  $\triangle AKD$ ) и  $\sphericalangle CTM = 180^\circ - \alpha$  (външен ъгъл за  $\triangle TMB$ ).

От равнобедрения  $\triangle CTM$  имаме, че  $\sphericalangle TCM = \sphericalangle TMC = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$ , а от равнобедрения  $\triangle CDK$  имаме, че  $\sphericalangle DCK = \sphericalangle DKC = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

Тогава  $\sphericalangle KCM = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACK - \sphericalangle BCM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$ .