.МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

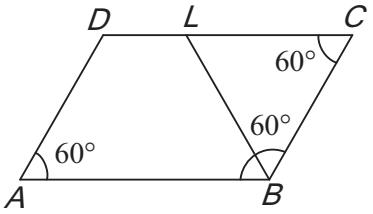
math-bg.com

Примерни решения на задачите

ЛОВЕЧ – 2011

ОСМИ КЛАС

8.1. Четириъгълникът $ABCD$ на фигурата е успоредник с $\sphericalangle DAB = 60°$, а BL е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$. Намерете периметъра на $ABCD$, ако $BL = 5$ и $DL = 3$.



Решение. От $\sphericalangle DAB = 60°$ и $\sphericalangle ABL = \sphericalangle CBL$ следва, че $\sphericalangle CBL = \sphericalangle BCL = 60°$. Тогава $BC = CL = BL = 5$, откъдето $CD = CL + DL = 8$ и $P_{ABCD} = 2(BC + CD) = 2.13 = 26$.

Отговор. 26.

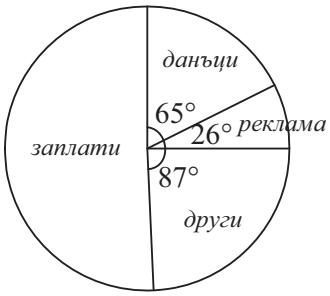
8.2. Ако $k + k^{-1} = 1 - \sqrt{3}$, колко е числената стойност на израза $\dfrac{22}{k^3 + k^{-3}}$?

Решение. $(k + k^{-1})^3 = k^3 + 3k + 3k^{-1} + k^{-3} = k^3 + k^{-3} + 3(k + k^{-1})$

$k^3 + k^{-3} = (k + k^{-1})^3 - 3(k + k^{-1}) = (1 - \sqrt{3})^3 - 3(1 - \sqrt{3}) = 7 - 3\sqrt{3}$

Отговор. $7 + 3\sqrt{3}\left(= \dfrac{22}{7 - 3\sqrt{3}}\right)$

8.3. На кръговата диаграма е представено разпределението на разходите на фирма за един месец. За същия месец разходите им за реклама са с 6000 лв. по-малко от тези за данъци. Колко лева са разходите им за заплати?



Решение.

$65° - 26° = 39°$, $360° - (65° + 26° + 87°) = 182° \Rightarrow \dfrac{x}{182} = \dfrac{6000}{39} \Rightarrow x = 28000$

Отговор. 28 000

8.4. Влак изминава разстоянието между две гари за определено време. Ако средната скорост на влака се увеличи с 10 km/h, влакът ще пристигне 40 минути по-рано. Ако тази скорост се намали с 10 km/h, влакът ще пристигне 1 час по-късно. Колко километра е разстоянието между двете гари?

Решение. Нека S е разстоянието между двете гари, v – средната скорост и t – времето, за които влакът изминава пътя при тази скорост. Тогава

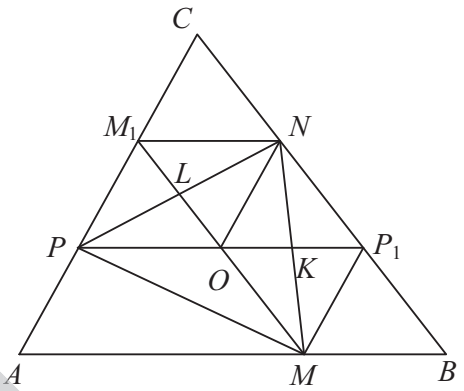
$$S = vt = (v + 10)\left(t - \frac{2}{3}\right) = (v - 10)(t + 1)$$

От $vt = (v - 10)(t + 1)$ получаваме $v = 10t + 10$ и от $vt = (v + 10)\left(t - \dfrac{2}{3}\right)$ получаваме $v = 15t - 10$. Оттук $t = 4$ и $v = 50$. Разстоянието между двете гари е 4.50 = 200 км.

8.5. Върху страните AB, BC и CA на $\triangle ABC$ са избрани съответно точките M, N и P. Намерете отношението $BN : NC$, ако е известно че медианите на ΔMNP са успоредни на страните на ΔABC, като медианата през M е успоредна на BC.

math-bg.com

Решение. Нека точката O е медицентър на ΔMNP. Тъй като $MO \parallel BC$, то $PO \parallel AB$ и $NO \parallel AC$. Нека $PO \cap BC = P_1$, $MO \cap AC = M_1$.



Тогава OP_1BM е успоредник и $MO = BP_1$, $OP_1 = MB$. Ако $OP_1 \cap MN = K$, то $MK = KN$,

$OP_1 \parallel MB \Rightarrow \sphericalangle MOK = \sphericalangle KP_1N \Rightarrow \Delta MOK \cong \Delta NP_1K$

$\Rightarrow OM = NP_1 \Rightarrow BP_1 = NP_1$. Аналогично

$NO \parallel AC, OM_1 \parallel NC \Rightarrow ON = CM_1, OM_1 = CN$

$OM_1 \cap PN = L \Rightarrow PL = LN$

$OM_1 \parallel NB \Rightarrow \sphericalangle NOL = \sphericalangle LM_1P \Rightarrow \Delta NOL \cong \Delta PM_1L$

$\Rightarrow ON = PM_1 \Rightarrow NM_1 \parallel OP$

$\Rightarrow NM_1 \parallel OP_1 \Rightarrow OM_1 = NP_1 = CN$

$BP_1 = NP_1, NP_1 = CN \Rightarrow BN : CN = 2:1$

8.6. а) Намерете всички двуцифрени числа n такива, че последните две цифри на числото n^2 образуват точно числото n.

б) Намерете всички трицифрени числа n такива, че за всяко естествено $k > 1$ последните три цифри на числото n^k образуват точно числото n.

Решение. а) Нека n е двуцифрено число такова, че последните две цифри на числото n^2 образуват числото n, т.е. $n^2 = 100s + n$ за някое естествено s. Тогава $100 \mid n(n-1)$. Оттук и от това, че n и $n-1$ са взаимно прости, 4 и 25 са взаимно прости и $n < 100$, получаваме, че $4 \mid n$, а $25 \mid n-1$, или $4 \mid n-1$, а $25 \mid n$.

1 сл.) $4 \mid n$, $25 \mid n-1$. От $25 \mid n-1$ и n е двуцифрено, следва че възможните стойности за n са 26, 51 и 76. От тях единствено числото 76 се дели на 4.

2 сл.) $4 \mid n-1$, $25 \mid n$. От $25 \mid n$ и n е двуцифрено, следва че възможните стойности за n са 25, 50 и 75. От тях единственото число, за което предшественикът му се дели на 4, е 25.

Така окончателно $n = 25,\ 76$.

б) Нека n е трицифрено число. Първо ще докажем, че ако последните три цифри на n^2 образуват числото n, то за всяко $k > 1$ последните три цифри на числото n^k образуват n. Нека $k > 1$ и да предположим, че последните три цифри на n^k образуват n, т.е. $n^k = 1000s + n$ за някое естествено s. Тогава $n^{k+1} = 1000sn + n^2 = 1000(sn + s) + n$ и следователно последните три цифри на числото n^{k+1} също образуват n.

Така за да решим задачата, достатъчно е да намерим онези трицифрени числа n, за които последните три цифри на числото n^2 образуват n. Аналогично на решението на а) получаваме $8 \mid n$ и $125 \mid n-1$, или $8 \mid n-1$ и $125 \mid n$.

1 сл.) $8 \mid n$, $125 \mid n-1$. От $125 \mid n-1$ и n е трицифрено, следва че възможните стойности за n са 126, 251, 376, 501, 626, 751 и 876. Сред тях единственото число, което се дели на 8, е 376.

2 сл.) $8 \mid n-1$, $25 \mid n$. От $125 \mid n$ и n е трицифрено, следва че възможните стойности за n са 125, 250, 375, 500, 625, 750 и 875. Единствено числото 625 – 1 = 624 се дели на 8.

Така окончателно $n = 376$, 625.

math-bg.com

ДЕВЕТИ КЛАС

9.1. Съставете квадратно уравнение, единият корен на което е равен на сбора, а другият – на произведението на корените на уравнението $2x^2-7x+4=0$.

Решение. По формулите на Виет получаваме $2x^2-7x+4=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{7}{2}$; $x_1x_2=2$

или $2x^2-7x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-32}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{7}{2}$ $x_1x_2=2$.

$\left(x-\frac{7}{2}\right)(x-2)=0 \Rightarrow x^2-\frac{11}{2}x+7=0$

Отговор. $2x^2-11x+14=0$

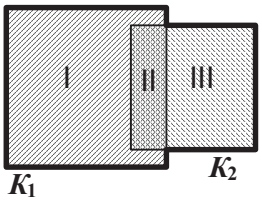
9.2. Ако $a=\frac{1}{a}+b$ и $b=\frac{7}{b}+a$, колко е стойността на израза $|a-b|$?

Решение.

$a=\frac{1}{a}+b \Rightarrow a^2-ab=1,\ b=\frac{7}{b}+a \Rightarrow b^2-ab=7 \Rightarrow a^2+b^2-2ab=8 \Rightarrow |a-b|=2\sqrt{2}$

Отговор. $2\sqrt{2}$

9.3. На чертежа, общата част на квадратите K_1 и K_2 е правоъгълник с лице 3 cm^2. Нека S_{I}, S_{II} и S_{III} са лицата на фигурите означени с I, II и III. Ако $S_{\text{I}} : S_{\text{II}} : S_{\text{III}} = 8 : 1 : 3$, намерете периметъра на фигурата, образувана от квадратите K_1 и K_2.



Решение.

Нека a и b са страните съответно на квадратите K_1 и K_2.

Тогава $S_I=a^2-3,\ S_{III}=b^2-3 \Rightarrow \frac{a^2-3}{3}=8, \frac{b^2-3}{3}=3 \Rightarrow a=3\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}$

$S_{II}=2\sqrt{3}.x=3 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P=3a+(a-b)+2(b-x)+b=15\sqrt{3}$

Отговор. $15\sqrt{3}$ cm .

9.4. Намерете целите стойности на x , които са решения на уравнението

$$\left(\frac{21}{x}-2\right)^2-2\left(\frac{21}{x}-2\right)=x+42 .$$

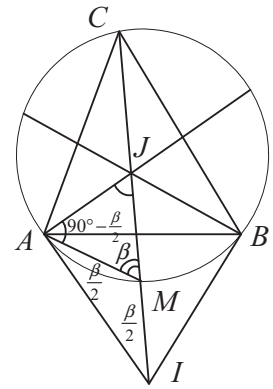
Решение. Записваме уравнението във вида

$\left(\frac{21}{x}-2\right)^2-2\left(\frac{21}{x}-2\right)+1=x+43 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{21}{x}-2\right)-1\right)^2=x+43$, т.е. $\left(\frac{21}{x}-3\right)^2=x+43$.

Тъй като x е цяло число, то дясната страна на уравнението е цяло число, оттам и лявата му страна приема само цели стойности. Следователно x дели 21, т.е. $x=\pm1;\pm3;\pm7;\pm21$. При $x=-7$ и $x=21$ числото $x+43$ е точен квадрат. Непосредствено се проверява, че -7 е корен на последното уравнение, а 21 не е корен. Следователно $x=-7$.

math-bg.com

9.5. В ΔABC точките J и I са съответно център на вписаната окръжност и център на външно вписаната към страната AB окръжност. Отсечката JI пресича описаната около ΔABC окръжност в точка M. Намерете отношението $JM : MI$.



Решение. Нека α, β, γ са ъглите на ΔABC.

Тогава $\sphericalangle JAB = \frac{\alpha}{2}, \sphericalangle BAM = \sphericalangle BCM = \frac{\gamma}{2}$, откъдето

$\sphericalangle JAM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Тъй като $AJ \perp AI$, то $\sphericalangle IAM = \frac{\beta}{2}$.

Но $\sphericalangle AMJ = \sphericalangle ABC = \beta$, откъдето $\sphericalangle AIM = \beta - \sphericalangle IAM = \frac{\beta}{2}$ и

$\sphericalangle AJM = 180° - \left(\beta + 90° - \frac{\beta}{2}\right) = 90° - \frac{\beta}{2}$.

Следователно $IM = AM = MJ$, т.е. $JM : MI = 1$.

9.6. Нека уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има два различни реални корена x_1 и x_2.

а) Докажете тъждеството

$$(x^2 - x_1x + x_1 - 1)(x^2 - x_2x + x_2 - 1) = x^4 + ax^3 + (b - a - 2)x^2 - (a + 2b)x + a + b + 1.$$

б) Намерете броя на различните реални корени на уравнението

$$x^4 + ax^3 + (b - a - 2)x^2 - (a + 2b)x + a + b + 1 = 0.$$

Решение. а) След разкриване на скобите и групиране получаваме

$(x^2 - x_1x + x_1 - 1)(x^2 - x_2x + x_2 - 1) =$

$x^4 - (x_1 + x_2)x^3 + (x_1x_2 + x_1 + x_2 - 2)x^2 - (2x_1x_2 - x_1 - x_2)x - (x_1 + x_2) + x_1x_2 + 1$.

По формулите на Виет за уравнението $x^2 + ax + b = 0$, имаме $x_1 + x_2 = -a$ и $x_1x_2 = b$, откъдето получаваме

$(x^2 - x_1x + x_1 - 1)(x^2 - x_2x + x_2 - 1) = x^4 + ax^3 + (b - a - 2)x^2 - (a + 2b)x + a + b + 1$.

б) Съгласно а) корените на $f(x) = x^4 + ax^3 + (b - a - 2)x^2 - (a + 2b)x + a + b + 1 = 0$ са точно корените на уравненията $f_1(x) = x^2 - x_1x + x_1 - 1 = 0$ и $f_2(x) = x^2 - x_2x + x_2 - 1 = 0$. Дискриминантата на уравнението $f_i = 0$ за $i = 1, 2$ е $D_i = x_i^2 - 4x_i + 4 = (x_i - 2)^2$, откъдето корените на уравнението $f_i = 0$ са $x_{i1} = 1$ и $x_{i2} = x_i - 1$. Така корените на уравнението $f(x) = 0$ са 1, $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$. Тъй като $x_1 \neq x_2$, то броят на различните решения на уравнението $f(x) = 0$ се определя еднозначно от това дали някое от числата $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ е равно на 1, т.е. дали 2 е корен на уравнението $x^2 + ax + b = 0$. Така окончателно, ако $4 + 2a + b = 0$ и $a \neq -4$ ($b \neq 4$) (защото, ако $4 + 2a + b = 0$ и $a = -4$ ($b = 4$) уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има един двоен корен $x_1 = x_2 = 2$), уравнението $f(x) = 0$ има две различни решения, а в случай, че $4 + 2a + b \neq 0$, то уравнението $f(x) = 0$ има три различни решения.

math-bg.com

ДЕСЕТИ КЛАС

10.1. Колко е стойността на израза $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{5}{4}}.\left(3^{-\frac{3}{4}}\right)^{2}.\frac{100^{1,3}.10^{-\frac{4}{15}}}{0,01^{\frac{1}{3}}}$?

Решение. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{5}{4}}.\left(3^{-\frac{3}{4}}\right)^{2}.\frac{100^{1,3}.10^{-\frac{4}{15}}}{0,01^{\frac{1}{3}}}=3^{\frac{10}{4}}.3^{-\frac{6}{4}}.10^{\frac{13}{5}}.10^{-\frac{4}{15}}.10^{\frac{2}{3}}=3.10^{3}$

Отговор. 3 000

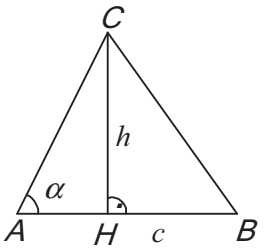
10.2. За коя стойност на a най-малката стойност на израза $\frac{1}{a+4x-x^2}$ е равна на $\frac{1}{3}$?

Решение. $\min\frac{1}{a+4x-x^2}\Leftrightarrow\max\left(a+4x-x^2\right)$, $\max\left(a+4x-x^2\right)=a+4.2-2^2=a+4$,

$\frac{1}{a+4}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=-1$.

Отговор. -1

10.3. Остроъгълният ΔABC с лице 4 има страна $AB=c$ и височина към нея, $CH=h$. Ако $tg\alpha=2$, а h и c са корените на квадратното уравнение $x^2-6x+s=0$, намерете дължината на AC.



***Решение*:** $S_{ABC}=\frac{1}{2}c.h=4\Rightarrow c.h=8$,

$c.h=8=s\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_{1,2}=2,4$.

I. $c=2,h=4,tg\alpha=2\Rightarrow AH=2\Rightarrow B\equiv H$, ΔABC е правоъгълен.

II. $c=4,h=2,tg\alpha=2\Rightarrow AH=1\Rightarrow AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

Отговор. $\sqrt{5}$.

10.4. Намерете реалните стойности на параметъра a, за които сборът на реалните корени на уравнението $x^2+2\left(a^2+4a\right)x+8a^3+18a^2+63=0$ приема най-голяма стойност.

Решение: Корените на уравнението са реални, ако $D=a^4-2a^2-63\geq 0$, т.е. $\left(a^2-9\right)\left(a^2+7\right)\geq 0$. Оттук получаваме $a\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right)$. По формулите на Виет намираме $S\left(a\right)=x_1+x_2=-2a^2-8a$. Максимумът на $S\left(a\right)$ се достига при $a=-2\notin\left(-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right)$. Като се има предвид интервала, в който е дефинирана $S\left(a\right)$, и че $S\left(-3\right)=6$, а $S\left(3\right)=-42$ е ясно, че най-голямата стойност е $S\left(-3\right)=6$.

10.5. Намерете периметъра на остроъгълен равнобедрен ΔABC, за който $AC=8$ и $\cos\sphericalangle BAC=\frac{3}{4}$.

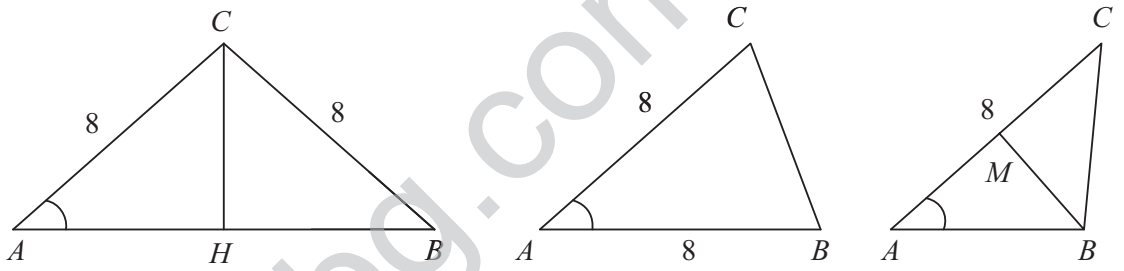
Решение. Възможни са 3 случая: I. $AC=BC$, II. $AB=AC$ и III. $AB=BC$.

math-bg.com

I. Нека $AC = BC = 8$ и H е петата на перпендикуляра от C към AB. Тогава $\frac{AH}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AH = 6 \Rightarrow AB = 12$. Тъй като $12^2 > 8^2 + 8^2$, то намереният триъгълник е тъпоъгълен и не е решение на задачата.

II. Нека $AB = AC = 8$. Тогава по косинусовата теорема намираме $BC^2 = 8^2 + 8^2 - 2.8^2 \frac{3}{4} = 32 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$. Тъй като $32 < 8^2 + 8^2$, то намереният триъгълник е остроъгълен и има периметър $16 + 4\sqrt{2}$.

III. Нека $AB = BC$. Тогава B лежи на симетралата на AC. Ако M е средата на AC, от правоъгълния триъгълник ABM намираме $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{4}{3}.4 = \frac{16}{3}$. Тъй като $8^2 > 2.\frac{16^2}{3^2} \Leftrightarrow 9 > 8$, то намереният триъгълник е тъпоъгълен и не е решение на задачата.



10.6. Нека n и k са естествени числа. Двама играчи играят следната игра: на всеки ход s ($s \le k$) първият играч записва естествено число a_s, $a_s \le n$, а след това вторият играч записва естествено число b_s, $b_s \le n$. Играта се печели от първият играч, ако сумата $a_1 + a_2 + ... + a_k + b_1 + b_2 + ... + b_k$ не е точен квадрат, а в противен случай печели вторият.

а) Докажете, че при $n = 10$ и $k = 11$ вторият играч има печеливша стратегия.

б) За фиксирано n, кой от двамата играчи има печеливша стратегия при $k = n + 2$?

Решение. а) Печелившата стратегия на втория играч е следната: Нека на стъпка $s \le 11$ първият играч избира числото a_s. Тогава вторият играч избира $b_s = 11 - a_s$. Тъй като $1 \le a_s \le 10$, то $1 \le b_s \le 10$ и следователно изборът на b_s е коректен. Така след 11-я ход получаваме следната сума

$a_1 + a_2 + ... + a_{11} + b_1 + b_2 + ... + b_{11} = a_1 + a_2 + ... + a_{11} + (11 - a_1) + (11 - a_2) + ... + (11 - a_{11}) = 11^2$ и следователно вторият играч печели играта.

б) Нека n е произволно естествено число и $k = n + 2$. Ще покажем печеливша стратегия за първия играч: На първа стъпка първия играч избира естественото число $a_1 \le n$ по произволен начин. Нека на стъпка $s \le k - 1$ вторият играч избира числото b_s. Тогава на стъпка $s + 1$ първият играч избира $a_{s+1} = n + 1 - b_s$. Тъй като $1 \le b_s \le n$, то $1 \le a_{s+1} \le n$ и следователно изборът на a_{s+1} е коректен. Така след k-тия ход получаваме следната сума

$S = a_1 + a_2 + ... + a_k + b_1 + b_2 + ... + b_k = a_1 + (n + 1 - b_1) + ... + (n + 1 - b_{k-1}) + b_1 + b_2 + ... + b_k =$
$= (k - 1)(n + 1) + a_1 + b_k$.

math-bg.com

От $k=n+2$ получаваме $S=(n+1)^2+a_1+b_k$. Тъй като a_1 и b_k са естествени числа по-малки или равни на n, то $(n+1)^2<(n+1)^2+2\le S\le(n+1)^2+2n<(n+2)^2$, откъдето S не е точен квадрат. Следователно първият играч печели играта.

ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

11.1. В купа има мандарини, портокали и лимони – общо 42 плода. Вероятността по случаен начин да се избере един лимон от купата е $\frac{3}{7}$, а вероятността да НЕ се избере портокал е $\frac{2}{3}$. Колко мандарини има в купата?

Решение. $Л=\frac{3}{7}42=18,\ Л+М=\frac{2}{3}42=28\Rightarrow М=10$.

Отговор. 10

11.2. Аритметична прогресия съдържа 20 члена. Сборът на членовете с четни номера е с 80 по-голям от сбора на членовете с нечетни номера. На колко е равна разликата на тази прогресия?

Решение. $d+3d+5d+\cdots+19d-(2d+4d+6d+\cdots+18d)=10d=80\Rightarrow d=8$

Отговор. 8

11.3. Дължините на страните на правоъгълен триъгълник са последователни членове на геометрична прогресия. Намерете дължината на по-малкия катет, ако хипотенузата има дължина 2.

Решение. Нека a е дължината на по-малкия катет, а $q>1$ е частното на прогресията. Тогава страните на триъгълника са $a,\ aq,\ aq^2$. Оттук последователно намираме

$$a^2+a^2q^2=a^2q^4\Rightarrow q^4-q^2-1=0\Rightarrow q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$aq^2=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}=2\Rightarrow a=\frac{4}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1.$$

Отговор. $\sqrt{5}-1$

11.4. Дадено е уравнението $4kx^2-2x+k^3=0$, където k е реален параметър.

а) Намерете стойностите на k, за които уравнението има два различни положителни корена x_1 и x_2.

б) Намерете стойностите на k, за които средноаритметичното на $\log_2 x_1$ и $\log_2 x_2$ е -2.

Решение. а) Ако $k=0$, уравнението е линейно и има единствен реален корен $x=0$. следователно $k\ne 0$. За да има квадратното уравнение два различни реални корена трябва $x_1+x_2=\frac{1}{2k}>0\Rightarrow k>0$, $x_1x_2=\frac{k^2}{4}>0$, което е вярно за всяко $k\ne 0$, и $D=1-4k^4>0\Rightarrow k\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow k\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

б) $\frac{\log_2 x_1+\log_2 x_2}{2}=\frac{\log_2 x_1x_2}{2}=-2\Rightarrow\log_2 x_1x_2=-4\Rightarrow x_1x_2=2^{-4}=\frac{1}{16}$. Оттук намираме

math-bg.com

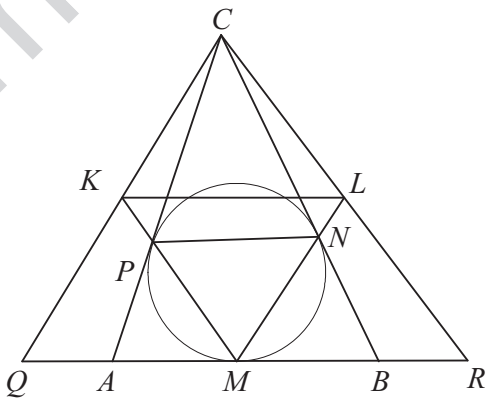
$x_1x_2=\frac{k^2}{4}=\frac{1}{16}\Rightarrow k^2=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\pm\frac{1}{2}$. Тъй като $k\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то $k=\frac{1}{2}$.

11.5. В ΔABC страната AB е най-малка, а вписаната в него окръжност се допира до страните AB, BC и CA съответно в точки M, N и P. Правата през точка C, успоредна на MN, пресича правата AB в точка Q, а правата през точка C, успоредна на MP, пресича правата AB в точка R.

а) Докажете, че точките Q и R са външни за отсечката AB.

б) Правата MN пресича правата CR в точка L, а правата MP пресича правата CQ в точка K. Намерете отношението $KL:QR$.

Решение. а) Нека $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $2p=a+b+c$. Тогава $AM=AP=p-a$, $BM=BN=p-b$, $CN=CP=p-c$. Тъй като $c<a, c<b$, то $AM<CN, BM<CP$. От $MN\parallel CQ\Rightarrow\frac{QM}{CN}=\frac{MB}{NB}=1\Rightarrow QM=CN>AM$, т.е. Q е външна за отсечката AB. Аналогично, от $MP\parallel CR\Rightarrow\frac{RM}{CP}=\frac{MA}{PA}=1\Rightarrow RM=CP>BM$.



б) От $QM=CN=CP=RM$ следва, че M е средата на RQ. Тогава ML и MK са средни отсечки, откъдето KL също е средна отсечка. Оттук $KL:QR=1:2$.

11.6. а) Нека p, q и r са реални числа. Ако $q^2-4pr=n^2$, докажете тъждеството $4p(px^2+qx+r)=(2px+q+n)(2px+q-n)$, където x е произволно реално число.

б) Докажете, че ако трицифреното число $\overline{abc}$ е просто, то уравнението $ax^2+bx+c=0$ няма рационални корени.

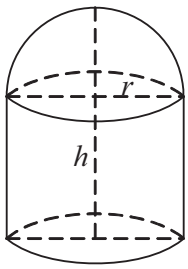
Решение. а) След разкриване на скобите от дясната страна получаваме $(2px+q+n)(2px+q-n)=4p^2x^2+4pqx+q^2-n^2=4p^2x^2+4pqx+4pr=4p(px^2+qx+r)$.

б) Уравнението $ax^2+bx+c=0$ има рационални корени при $D=b^2-4ac=n^2$, където n е цяло число. Следователно трябва да докажем, че ако $\overline{abc}$ е просто, то $b^2-4ac\neq n^2$.

Да допуснем, че $b^2-4ac=n^2$. Тъй като $\overline{abc}=10^2a+10b+c$, като използваме тъждеството от а) при $x=10$ получаваме $4a(10^2a+10b+c)=(20a+b+n)(20a+b-n)$, т.е. че простото число $\overline{abc}$ дели $20a+b+n$ или $20a+b-n$. Но това е невъзможно, защото $b\geq n$ и $20a+b\pm n<100a+10b+c$.

ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

12.1. Куполът на чертежа е съставен от цилиндър с радиус r и полусфера със същия радиус. Височината на купола е h. Да се



math-bg.com

намери отношението $r:h$, ако цилиндърът и полусферата имат равни обеми.

Решение. $V_Ц = \pi r^2(h-r)$, $V_{ПС} = \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow h-r = \frac{2}{3}r \Rightarrow h = \frac{5}{3}r$

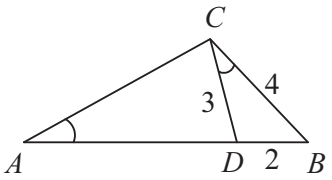
Отговор. $3:5$

12.2. Правилен многоъгълник има 20 диагонали. Колко градуса е мярката на вътрешния ъгъл на този многоъгълник?

Решение. $\frac{n(n-3)}{2} = 20 \Rightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow \alpha = 135°$

Отговор. 135^0.

12.3. В ΔABC на чертежа, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCB$, $BC = 4$, $BD = 2$, $DC = 3$. Да се намери лицето на ΔABC.



Решение. $\Delta ABC \sim \Delta CBD \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} = \frac{CA}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{4}{2} = \frac{CA}{3} \Rightarrow AB = 8, AC = 6$

$S_{ABC} = \sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)} = \sqrt{9.1.3.5} = 3\sqrt{15}$

Отговор $S_{ABC} = 3\sqrt{15}$.

12.4. Да се реши системата $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 \\ x\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0 \end{cases}$.

Решение: От второто уравнение получаваме $x = 0$ или $\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0$.

При $x = 0$, от първото уравнение получаваме $\sqrt{-4y^2} = y + 2$. Това уравнение има смисъл при $-4y^2 \geq 0$, т.е. $y = 0$, но това не е решение.

Нека $\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0$. Тогава системата се свежда до двете системи:

$\begin{cases} x = 2y \\ x = y + 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -2y \\ x = y + 2 \end{cases}$. Решенията са $(4;2)$ и $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

12.5. Даден е триъгълник *ABC* с $\sphericalangle ABC = 30^0$. Окръжност *k*, с център върху правата *AB*, която минава през *A*, се допира до *BC* в точка *C*. Ако радиусът на *k* е *r*, да се намери лицето на триъгълника *ABC*.

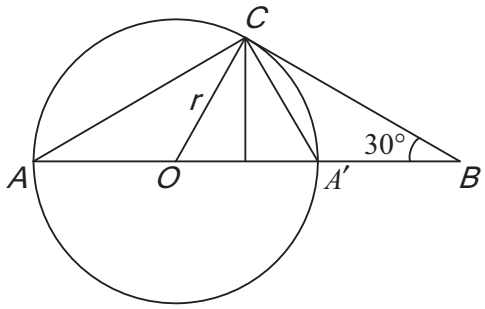
***Решение*:** Нека *O* е центъра на *k*. Тъй като $OC \perp CB$ и $\sphericalangle ABC = 30^0$, то от правоъгълния триъгълник *OCB* намираме $OB = 2r$ и $BC = \sqrt{3}r$. Имаме две възможности:

I. *O* е между *A* и *B*; II. *A* е между *O* и *B*.

I. $AB = AO + OB = r + 2r = 3r$. Тогава

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC.\sin 30^0 = \frac{3r.\sqrt{3}r}{4} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

II. $AB = OB - OA = 2r - r = r$. Тогава

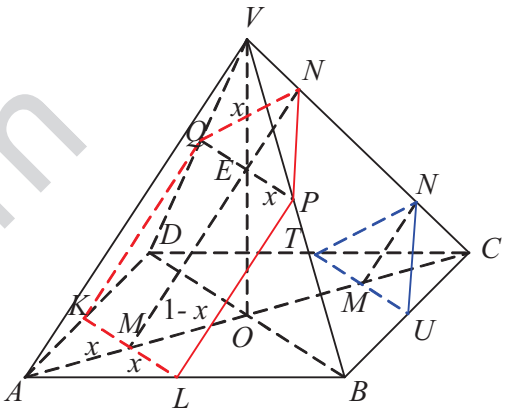


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA.BC.\sin 30^0 = \frac{r.\sqrt{3}r}{4} = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}.$$

12.6. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ с връх V, такава че $AB = AV = \sqrt{2}$. През точка M от отсечката AC, е построена равнина α, перпендикулярна на околния ръб CV.

а) Да се изрази лицето S на сечението на пирамидата с α като функция на $AM = x$.

б) Да се намери най-голямата стойност на S.



Решение: а) Нека $AC \cap BD = O$. Тогава $\triangle AOB$ е равнобедрен правоъгълен с хипотенуза $AB = \sqrt{2}$, откъдето намираме $AO = BO = 1$. Следователно $AC = 2AO = 2$ и за $\triangle AVC$ имаме $AV^2 + CV^2 = AC^2$, откъдето $AV \perp CV$. Ако $\alpha \cap CV = N$, от $\alpha \perp CV$ следва, че $MN \perp CV$ и $MN \parallel AV$.

I. Нека M е между A и O, $\alpha \cap AD = K$, $\alpha \cap AB = L$, $\alpha \cap BV = P$ и $\alpha \cap DV = Q$. Тогава $KL \perp VC \perp PQ$. Но $BD \perp CV$, откъдето $KL \parallel BD \parallel PQ$. Нека $MN \cap OV = E$. Тъй като $AO \perp OV$, $AO = OV$ и $ME \parallel AV$, то $AM = EV = x$. Но $\triangle AKL$ и $\triangle PVQ$ са равнобедрени правоъгълни, откъдето получаваме $KL = PQ = 2x$. От равнобедрения правоъгълен ΔVEN с хипотенуза $VE = x$ намираме $NE = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Тъй като $MO = EO = 1 - x$, то $ME = \sqrt{2}(1-x)$. Така за лицето S на сечението получаваме

$$S(x) = KL.ME + \frac{1}{2} PQ.EN = 2x.\sqrt{2}(1-x) + \frac{1}{2} 2x.\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4x - 3x^2).$$

II. 1. Нека M е между O и C, $\alpha \cap CD = T$, $\alpha \cap CB = U$. Тогава $TU = 2MC = 2(2-x)$ и $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$. Сега за лицето S_1 на сечението получаваме

$$S_1(x) = \frac{1}{2} TU.MN = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)^2.$$

$$S(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = S_1(1).$$

б) Трябва да намерим максимумът на функциите $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4x - 3x^2)$ в интервала $(0;1)$ и $S_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)^2$ в интервала $[1;2)$.

Тъй като абсолютният максимум на $S(x)$ се достига за $x = \frac{2}{3}$ и $x = \frac{2}{3} \in (0;1)$, то $\max S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4.\frac{2}{3} - 3.\frac{4}{9}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

math-bg.com

Максимумът на $S_1(x)$ в интервала $[1;2)$ се достига за $x=1$ и $\max S_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Но $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3\sqrt{2}}{2}$, така че $\max S(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Задачите са предложени от: Чавдар Лозанов (8.1; 9.4; 10.3; 10.5; 11.3; 12.2; 12.3;12.5; 12.6), Симеон Замковой (8.5; 9.4; 9.5; 10.2;11.4;11.5; 11.6), Таня Ичева (10.4; 12.4), Мадлен Христова (8.2; 8.3; 8.4; 9.1; 9.2; 9.3; 9.4; 10.1; 10.2; 10.3; 10.5, 11.1; 11.2; 11.4; 12.1; 12.3), Христо Ганчев (8.6; 9.6; 10.6)

Брошурата е подготвена от Чавдар Лозанов.

math-bg.com