Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

4 юни 2011 г.

ТЕМА за 11 – 12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Намерете сумата на всички реални корени на уравнението $\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{1+\sqrt{3-x^2}} = x.$

A) -1 **B)** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ **C)** $\sqrt{5}$ **D)** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\sqrt{3}$

2. Даден е ΔABC, в който $\angle ACB = 120°$, радиусът на вписаната окръжност е r, а радиусът на външновписаната окръжност, допираща се до страната AB, е r_c. Ако отношението $\dfrac{r_c}{r} = m$ е цяло число, намерете възможно най-малката стойност на m.

A) 13 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 19 **E)** 25

3. Числата 1, 2, 3, … , 9, 10 са записани по окръжност. Нека M е най-голямата от сумите на всички четворки съседни числа. Най-малката възможна стойност на M е:

A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 27

4. Върху черната дъска са написани естествените числа от 1 до 2011 включително. Ако x и y са две от числата, изтриваме ги и на тяхно място записваме числото $\varphi(x+y)$, където φ е функцията на Ойлер (т.е. $\varphi(k)$ е броят на числата от 1 до k включително, които са взаимно прости с k). Коя е най-малката възможна стойност на последното число на дъската?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** по-голяма от 5

5. В триъгълна пирамида $ABCD$ всички ръбове са равни на $\sqrt{6}$, а M е такава точка от ръба AB, че $AM : BM = 6:5$. Ако S_1 и S_2 са повърхнините, а V_1 и V_2 са обемите съответно на пирамидите $ACDM$ и $BCDM$, то сумата $\dfrac{S_1}{V_1} + \dfrac{S_2}{V_2}$ е равна на:

A) 12 **B)** 17 **C)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **D)** $\dfrac{34\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **E)** $17\sqrt{6}$

6. На кое рационално число е равна стойността на израза $tg^6\dfrac{\pi}{7} - 21\,tg^4\dfrac{\pi}{7} + 35\,tg^2\dfrac{\pi}{7}$?

7. По колко различни начина могат да се разположат цифрите от 1 до 9 в таблица 3×3 (във всяка клетка по една цифра) така, че ако зачертаем произволен ред и произволен стълб на таблицата, оставащите цифри, четени от произволно място по посока на часовниковата стрелка или обратно на нея, образуват 4-цифрено число, за което сборът на първата и третата му цифра е равен на сбора на втората и четвъртата? (Два начина се считат за различни, ако съответните две таблици се различават поне по една клетка.)

math-bg.com