РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 9 и 10 клас

1. Отг. В). Щом белите ивици са 8 броя и с тях започва и завършва пътеката, то черните са 7. Общо ивиците са 15 и следователно цялата пътека е с дължина $15.0,5 = 7,5\,m$.

2. Отг. С). Страната XY на правоъгълника е средна отсечка на трапеца. Тъй като другата страна на правоъгълника е половината от височината на трапеца, то лицето на трапеца е два пъти по-голямо от лицето на правоъгълника, т.е. то е равно на 26 cm^2.

3. Отг. D). Тъй като $P = 38$, $Q = 29$ и $R = 20$, вярното твърдение е **D)**.

4. Отг. А). Ако две отсечки имат общ връх, то в другите им два края трябва да бъде записано едно и също число. Оттук следва, че във всяка точка трябва да бъде записано 1 или 4. При това е изпълнено условието за съгласуваност, т.е. какъвто и път от отсечки да се избере, започващ от 1 и завършващ в 4, броят на точките между 1 и 4 е четен. Сега лесно се получава, че $x = 1$.

5. Отг. Е). Ако a (делимо) и $b \neq 0$ (делител) са цели числа, то съществуват единствени цели числа q (частно) и r (остатък) така, че $a = bq + r$. При това $0 \le r < |b|$. От равенството $a = bq + r$ следва, че $bq = a - r = 2011 - 1011 = 1000$, т.е. $bq = 1000$. Тъй като b и q са цели числа, то с помощта на полученото равенство заключаваме, че $|b| \le 1000$. От $0 \le r < |b| \le 1000$ следва, че $1011 < 1000$, което е невъзможно. Следователно не съществува делител така, че да се получи остатък 1011. Така, единственият верен отговор е **Е**).

6. Отг. С). Ако дължината на страната на една плочка е $x\,cm$, то $24.5x = 360$, откъдето $x = 3$ и следователно лицето на една плочка е 9 cm^2.

7. Отг. Е). Записът изглежда така: 1003, 1012, 1021, 1030, 1102, 1111, 1120, 1201, 1210, 1300, 2002, 2011, …

8. Отг. С). Ротация, която преобразува една от отсечките в другата, притежава следното свойство: разстоянията от центъра на ротацията до двата края на една от отсечките са равни на разстоянията от центъра до двата края на другата отсечка. Това свойство е изпълнено само за точките X и T.

9. Отг. С). От условието следва, че всеки от триъгълниците е равнобедрен с ъгъл между бедрата, равен на 60^0. Следователно шестте триъгълника са равностранни със страна 1. Така за обиколката на фигурата получаваме 12.

10. Отг. Е). Да разгледаме тялото, образувано от трите зарчета. Сборът от точките на горната стена на тялото, на долната стена на тялото и на залепените стени е $3.7 = 21$. Тъй като сборът от точките на четирите допиращи се стени е $2.5 = 10$, то за сбора от точките на горната и долната стена на тялото остават $21 - 10 = 11$ точки. Но единствената възможност за получаване на 11 е $11 = 5 + 6$. Шестицата на долното зарче е срещу единицата и следователно не може да се намира на долната стена на тялото. Заключаваме, че шестицата е на горната стена на тялото.

11. Отг. В). 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди са възможни само за месец с 31 дни. При това 5-те понеделника са на дати 1, 8, 15, 22 и 29; 5-те вторника са на дати 2, 9, 16, 23 и 30; а 5-те среди са на дати 3, 10, 17, 24 и 31. Ако предният месец има 31 дни, то неделите в него са на дати (отзад напред) 31, 24, 17, 10 и 3, т.е. броят на неделите е 5 и това противоречи на условието на задачата. Заключаваме, че предният месец не може да има 31 дни. Ако предният месец има 30 дни, то неделите в него са на дати 30, 23, 16, 9 и 2, т.е. броят на неделите е отново 5. Остава единствената възможност предният месец да е февруари и годината да не е високосна. В този случай броят на неделите е точно 4. Следователно месецът с 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди е със сигурност март. Следващият месец е април и петъците в него са на дати 2, 9, 16, 23 и 30, т.е. те са 5 на брой и **А)** не е вярно.

Неделите са на дати 4, 11, 18 и 25, т.е. те са 4 на брой и **C)** не е вярно. Средите в разглеждания месец април са на дати 7, 14, 21 и 28, т.е. средите са 4 на брой и **D)** не е вярно. Съботите са на дати 3, 10, 17 и 24, т.е. **B)** е вярно. Ситуацията е възможна и следователно твърдение **E)** не е вярно.

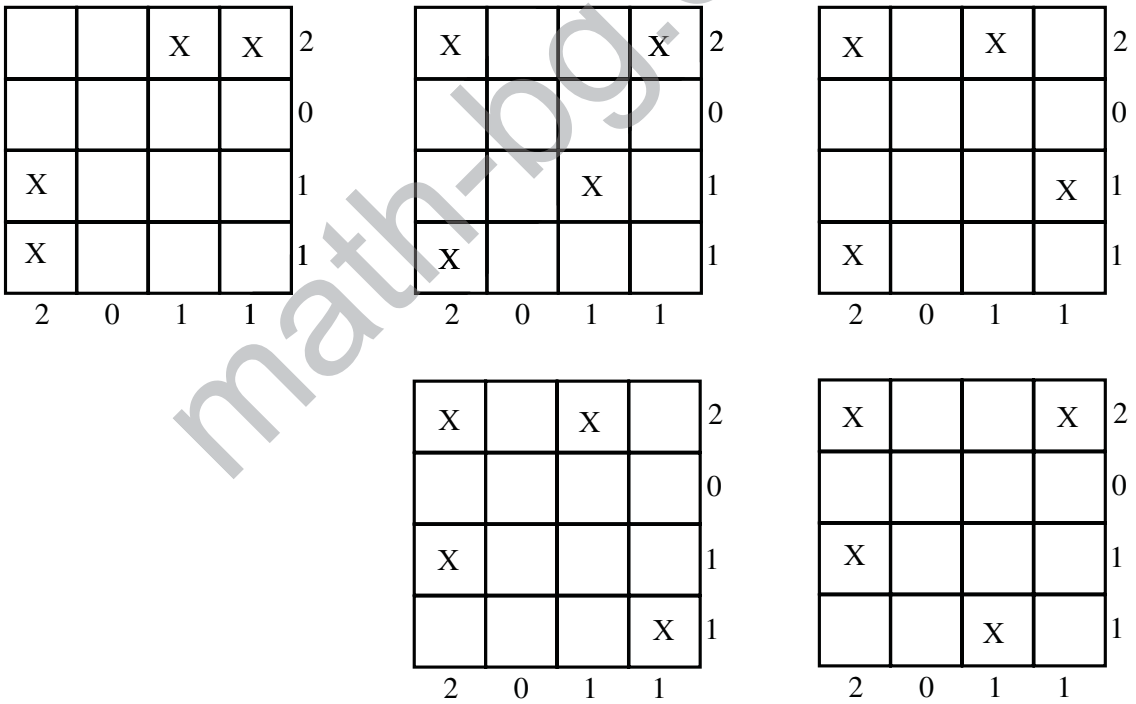
12. Отг. B). Ако двама спортисти разменят местата си четен брой пъти, те ще завършат в реда, в който са били в началото, а ако разменят местата си нечетен брой пъти, ще завършат обратно на реда, в който са били в началото. Оттук следва, че Михаел е завършил след Фернандо и след Себастиан, а Фернандо е завършил преди Себастиан.

13. Отг. A). Имаме $9^n+9^n+9^n=3.9^n=3.\left(3^2\right)^n=3.3^{2n}=3^{2n+1}=3^{2011}$, откъдето $2n+1=2011$ и следователно $n=\dfrac{2011-1}{2}=1005$.

14. Отг. E). Тъй като $a\,cm=0{,}1a\,dm$, от условието имаме $(0{,}1a+1)^3-(0{,}1a)^3=271$, откъдето $0{,}03a^2+0{,}3a+1=271$ и $a^2+10a-9000=0$. Единственият положителен корен на полученото квадратно уравнение е $a=90\,cm=9\,dm$. Следователно прелятото количество вода е $9^3\,dm^3$, т.е. 729 dm^3 = 729 литра.

15. Отг. C). От условието следва, че 15 е радиусът на вписаната окръжност в отсечения триъгълник. Тогава височината на този триъгълник, е $15.3=45$.

16. Отг. D).



Съществуват 3 начина за оцветяване на първия стълб. Първият е, когато черните клетки са последните две в стълба (първия чертеж). Вторият е, когато черните клетки са първата и четвъртата в стълба (втори и трети чертеж). Третият е, когато черните клетки са първата и третата в стълба (четвърти и пети чертеж). При първия начин оцветяването на останалите 2 черни клетки е определено еднозначно – единствената възможност е третата и четвъртата клетка на първия ред да са черни (първия чертеж). При втория начин съществуват две възможности за оцветяване на първия ред. При първата възможност втората черна клетка на първия ред е третата поред (втори и четвърти чертеж), а при втората възможност втората

черна клетка на първия ред е четвъртата поред (трети и пети чертеж). Сега оцветяването на четвъртата черна клетка е определено еднозначно. По този начин получаваме точно 5 различни оцветявания, както е показано.

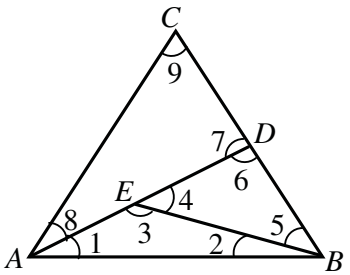
17. Отг. D). Ясно е, че ако цифрата на стотиците е четна, максималният брой последователни числа с поне една нечетна цифра е 11. Ако цифрата на стотиците е нечетна, броят на последователните трицифрени числа с тази цифра на стотиците е 100 и те са с исканото свойство (например числата от 500 до 599). Следващото поред естествено число обаче е само с четни цифри. От направените разглеждания следва, че максималният брой последователни числа с поне една нечетна цифра е не повече от $100+11=111$. Максималният брой 111 може да се реализира например при цифра на стотиците, равна на 3. Последователните числа са: 289, 290, …, 299, 300, 301, …, 398, 399. Вместо 3 може да се вземе коя да е от цифрите 5, 7 или 9, при което пак се получават 111 последователни естествени числа с поне една нечетна цифра.

18. Отг. D). Да означим липсващото число в първия стълб на таблицата с x. Като използваме условието за сумата на числата във всеки квадрат 2×2, изразяваме останалите три липсващи числа чрез x. Сумата на четирите липсващи числа е равна на $x+(7-x)+(x+1)+(4-x)=12$.

1	$7-x$	0
x	2	$x+1$
4	$4-x$	3

19. Отг. C). Две прави улици не могат да се пресичат повече от веднъж. Да допуснем, че улицата, на която живее Карол, е права. Улиците, на които живеят Еми и Бен, не могат да са прави, защото всяка от тях пресича два пъти улицата, на която живее Карол. Но тогава правите улици са най-много две – тази, на която живее Карол, и тази, на която живее Дейвид. Получаваме противоречие и заключаваме, че улицата, на която живее Карол, не е права. Улиците, на които живеят Дейвид, Еми и Бен, са прави, защото кои да е две от тях имат най-много по едно пресичане. Следователно Карол живее на "Кривата улица".

20. Отг. B). Да означим разглежданите ъгли последователно с числата от 1 до 9, както е показано на чертежа. Тъй като $\angle 3$ е външен за ΔEBD, то $\angle 3>\angle 6$. От друга страна $\angle 6$ е външен за ΔADC и заключаваме, че $\angle 6>\angle 9$. Следователно $\angle 3>\angle 6>\angle 9$. Това показва, че разглежданите 9 ъгъла трябва да приемат поне 3 различни помежду си стойности. Следният пример показва, че различните стойности могат да бъдат точно 3. Нека $\angle 1=\angle 2=\angle 5=\angle 8=36^0$. Тогава:



$\angle 3=180^0-(\angle 1+\angle 2)=180^0-72^0=108^0$; $\angle 4=180^0-\angle 3=72^0$; $\angle 6=180^0-(\angle 4+\angle 5)=72^0$; $\angle 7=180^0-\angle 6=108^0$; $\angle 9=\angle 6-\angle 8=72^0-36^0=36^0$. Трите различни стойности са 36^0, 72^0 и 108^0.

21. Отг. C). На всяка стена на куба има по 1 цял квадрат и по 4 половинки, т.е. черната част на всяка стена има лице, равно на лицето на 3 квадрата. Следователно лицето на черната част от повърхнината на куба е равно на лицето на 18 квадрата. Ако d е дължината на диагонала на квадрата, то $2d=1\,dm$, откъдето $d=5\,cm$. Лицето на един квадрат е $\frac{1}{2}d^2=12{,}5\,cm^2$, а лицето на черната част от повърхнината на куба е $12{,}5.18=225\,\text{cm}^2$.

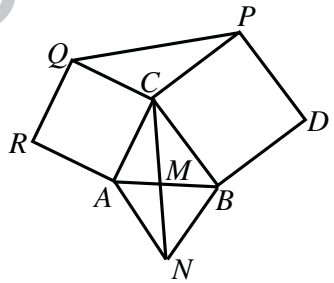
22. Отг. C). Нулата със сигурност участва в записа на едно хладно число. В противен случай сборът на последните четири цифри е поне $1+2+3+4=10$ и не може да бъде изпълнено условието първата цифра да е равна на сбора на останалите четири. Освен нулата, за

останалите три цифри измежду последните четири са възможни 7 случая: 1, 2 и 3 (първа цифра 6); 1, 2 и 4 (първа цифра 7); 1, 2 и 5 (първа цифра 8); 1, 2 и 6 (първа цифра 9); 1, 3 и 4 (първа цифра 8), 1, 3 и 5 (първа цифра 9); 2, 3 и 4 (първа цифра 9). Във всеки един от тези 7 случая съществуват по 24 хладни числа, които се получават, като разместваме местата на четирите последни цифри. Следователно общият брой на всички хладни числа е $24.7=168$.

23. Отг. B). Непосредствено се проверява, че $\frac{x}{y-1}>\frac{2x}{2y-1}>\frac{3x}{3y+1}>\frac{2x}{2y+1}>\frac{x}{y+1}$.

24. Отг. E). От вида на останалата част от параболата можем да направим заключение, че параболата е с формата на "чаша", т.е. $a>0$ и **A)** е винаги вярно. Върхът на параболата се намира надясно от точката $(1;-10)$ и следователно $-\frac{b}{2a}>1>0$, откъдето $b<0$ и **B)** е винаги вярно. Тъй като точката $(1;-10)$ лежи на параболата, то $y(1)=-10$, т.е. $a+b+c=-10<0$ и **C)** е винаги вярно. Освен това върхът на параболата лежи под оста Ox и $a>0$. Заключаваме, че уравнението $y=0$ има два различни реални корена, т.е. $b^2-4ac>0 \Rightarrow b^2>4ac$ и **D)** е винаги вярно. Накрая, функцията $y=2x^2-23x+11$ изпълнява условието на задачата и е пример за това, че твърдението $c<0$ (т.е. **E)**) може и да не е вярно.

25. Отг. E). Нека точката N е върху правата CM така, че M е между C и N, като $CM=MN=3$. Тогава четириъгълникът $ANBC$ е успоредник. Оттук следва, че $BN=AC=QC$, т.е. $BN=QC$. Освен това $\angle CBN=180^0-\angle ACB=\angle QCP$ ($\angle ACQ+\angle BCP=180^0$). Имаме още, че $BC=PC$ и следователно $\Delta CNB\cong\Delta PQC$ по I признак. Заключаваме, че $PQ=CN=2CM=2.3=6$.



26. Отг. D). Нека $(x;y)$ е решение на даденото уравнение. Ако $x\le y$, то $\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}$ и следователно $\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$, т.е. $\frac{1}{3}\le\frac{2}{x}$, откъдето $x\le 6$. От друга страна $\frac{1}{y}>0$ и получаваме, че $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$, т.е. $x>3$. Като даваме на x последователно стойности 4, 5 и 6, намираме решенията $(4;12)$ и $(6;6)$. Тъй като x и y участват симетрично в уравнението, заключаваме, че и $(12;4)$ е решение. Така намираме, че общият брой решения е 3.

27. Отг. B). Ако $k=1$, то $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 1+1\rangle+\langle 1+2\rangle=2+3=5=\langle 2k+3\rangle$. Следователно $k=1$ е решение на уравнението. При $k\ge 2$ е изпълнено $\langle k+1\rangle\ge 3$, $\langle k+2\rangle\ge 3$ и $\langle 2k+3\rangle\ge 3$, откъдето следва, че простите числа $\langle k+1\rangle$, $\langle k+2\rangle$ и $\langle 2k+3\rangle$ са нечетни. Заключаваме, че равенството $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2k+3\rangle$ е невъзможно, защото лявата му страна е четно число, а дясната – нечетно.

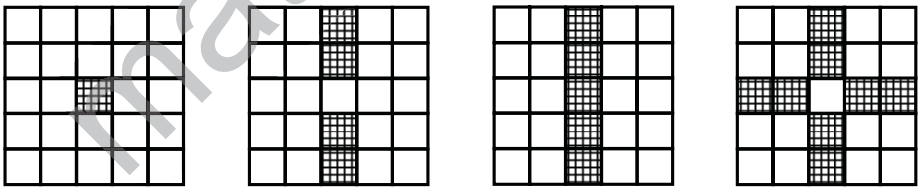
28. Отг. C). Тъй като ΔXYS е правоъгълен, то $XY=r\sqrt{2}$. Това означава, че отсечката XY е страна на вписан квадрат в по-голямата окръжност. Тогава лицето на по-малкия отрез от

големия кръг, който отговаря на хордата XY, е равно на $\frac{1}{4}(\pi r^2 - 2r^2) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$. За лицето на затъмнената част получаваме:

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{XY}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^2.$$

29. Отг. D). Да предположим, че числото a има прост делител p, различен от 2 и 3. Тогава p ще дели също b и c. Ето защо можем да запишем $a = p^{\alpha}a_1,\ p \nmid a_1,\ b = p^{\beta}b_1,\ p \nmid b_1$ и $c = p^{\gamma}c_1,\ p \nmid c_1$. От $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $p^{2\alpha}a_1^2 = 2p^{3\beta}b_1^3 = 3p^{5\gamma}c_1^5$, което е възможно тогава и само тогава, когато $p^{2\alpha} = p^{3\beta} = p^{5\gamma}$. Но тогава $a_1^2 = 2b_1^3 = 3c_1^5$, което показва, че числата a_1, b_1 и c_1 също удовлетворяват дадените равенства и числото $a_1b_1c_1$ има по-малък брой делители от abc. Тъй като се интересуваме от случая, когато числото abc има най-малък брой делители, можем да считаме, че a няма други прости делители освен 2 и 3. Същото важи за b и c. Затова можем да запишем, че $a = 2^x3^y$, $b = 2^z3^t$ и $c = 2^v3^w$, където x, y, z, t, v и w са цели положителни числа. Сега от $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $2^{2x}3^{2y} = 2^{3z+1}3^{3t} = 2^{5v}3^{5w+1}$. Това е възможно точно когато $2x = 3z+1 = 5v$ и $2y = 3t = 5w+1$. От равенството $2x = 5v$ следва, че съществува цяло число $i \geq 0$ така, че $x = 5i$ и следователно $v = 2i$. Сега от равенството $3z+1 = 5v$ намираме $3z = 10i - 1 = 9i + i - 1$. Това означава, че съществува цяло число $k \geq 0$ така, че $i - 1 = 3k$, т.е. $i = 3k+1$. Тогава $x = 15k+5,\ z = 10k+3$ и $v = 6k+2$. По същия начин от равенството $2y = 3t$ следва, че съществува цяло число $j \geq 0$, така, че $y = 3j$ и следователно $t = 2j$. Сега от равенството $2y = 5w+1$ намираме $5w = 6j - 1 = 5j + j - 1$. Това означава, че съществува цяло число $m \geq 0$ така, че $j - 1 = 5m$, т.е. $j = 5m+1$. Тогава $y = 15m+3,\ t = 10m+2$ и $w = 6m+1$. Получаваме, че $abc = 2^{31k+10}3^{31m+6}$. Оттук следва, че броят на делителите на abc е $(31k+11)(31m+7) \geq 77$, като равенство се достига при $k = m = 0$.

30. Отг. E).



Броят на подтаблиците 3×3 е 9. Първите 3 се получават от горните 3 реда на таблицата 5×5: едната подтаблица включва трите стълба отляво надясно, а другите две се получават с преместване на тази подтаблица вдясно на разстояние съответно една и две клетки. Останалите 6 подтаблици могат да се получат от описаните 3 с преместване надолу на една и две клетки. Отбелязаните клетки ще означаваме със защриховане, както е показано. При $n = 1$ е достатъчно да защриховаме централната клетка (вж. първия чертеж) и да забележим, че всяка от 9-те подтаблици 3×3 съдържа централната клетка. При $n = 2$ ще използваме защрихованото от втория чертеж. Очевидно централната подтаблица 3×3 съдържа точно две защриховани клетки. Ако придвижим тази подтаблица една клетка наляво или една клетка на надясно, двете защриховани клетки остават в новите подтаблици. Ако придвижим централната таблица една клетка нагоре или една клетка надолу, се появява нова защрихована клетка и в същото време се премахва една защрихована клетка. Следователно в новите подтаблици отново ще има по две защриховани клетки. Тези две подтаблици можем да преместваме наляво или надясно така, както направихме с централната подтаблица и

броят на защрихованите клетки ще се запази отново 2. С аналогични разсъждения, като използваме защрихованията съответно на третия и четвъртия чертеж, установяваме, че $n=3$ и $n=4$ са също решения на задачата. По-нататък е достатъчно да забележим, че е в сила свойството "дуалност": ако сме доказали твърдението за някое n, т.е. извършили сме защриховане на някои от клетките на таблицата 5×5 така, че всяка подтаблица 3×3 съдържа точно n защриховани клетки, то всяка от подтаблиците ще съдържа $9-n$ незащриховани клетки. Това означава, че ако вместо защриховане на избраните клетки извършим защриховане на останалите клетки в таблицата 5×5, ще получим доказателство на твърдението за $9-n$. Заключаваме, че към решенията на задачата трябва да прибавим още числата $9-1=8$, $9-2=7$, $9-3=6$ и $9-4=5$. Следователно за всички естествени числа n от интервала $0<n<9$ съществува подходящо защриховане така, че да е изпълнено условието на задачата.