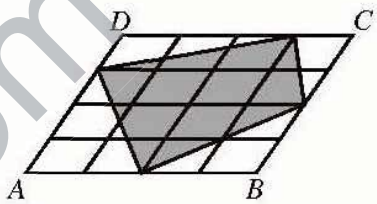
Решения и примерно точкуване

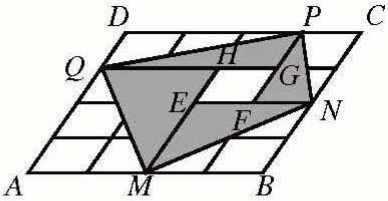
Задача 7.1. Един влак изминава разстоянието между гарите A и B за 4 ч 30 мин, а друг влак изминава същото разстояние за 6 ч 45 мин. В колко часа ще се срещнат влаковете, ако тръгнат едновременно един срещу друг от A и B в 8 ч 30 мин?

Решение: Нека разстоянието между A и B е s, а x е времето до срещата. Тогава, ако v_a е скоростта на влака, тръгнал от A, а v_b скоростта на влака, тръгнал от B, имаме $v_a x + v_b x = s$ (*). (2 т.) От друга страна, от равенството $v_a.4\frac{1}{2} = s$ намираме $v_a = \frac{2}{9}s$, а от $v_b.6\frac{3}{4} = s$ намираме $v_b = \frac{4}{27}s$. (2 т.) Като заместим в (*), получаваме $\frac{2}{9}sx + \frac{4}{27}sx = s$, откъдето $\frac{2x}{9} + \frac{4x}{27} = 1$, $10x = 27$, $x = \frac{27}{10}$ (1 т.). Влаковете ще се срещнат след 2 ч 42 мин, т.е. в 11 ч 12 мин. (1 т.)

Задача 7.2. Страните на успоредника $ABCD$ са разделени на 4 равни части с успоредни прави. Да се намери лицето на успоредника, ако лицето на затъмнения четириъгълник е равно на 68.



Решение: Да разделим четириъгълника $MNPQ$ на четири триъгълника и един успоредник, както е показано на чертежа. (2 т.) Имаме $S_{AMQ} = S_{MHQ}$, $S_{MBN} = S_{MEN}$, $S_{NCP} = S_{NPF}$ и $S_{PDQ} = S_{PGQ}$. (1 т.) Тогава, ако S е лицето на успоредника $ABCD$, то $S = 2S_{MNPQ} - S_{EFGH}$. (2 т.) Понеже $S_{EFGH} = \frac{1}{16}S$, имаме $S = 2.68 - \frac{1}{16}S$, откъдето $S = 128$. (1 т.)



Задача 7.3. В таблица 4×4 са разположени всички числа от 1 до 13, като в полетата от първия ред числата са еднакви, а в останалите полета са различни. Възможно ли е сборът по всеки ред и по всеки стълб да е един и същ? Обосновете отговора си.

Решение: Нека в полетата на първия ред е записано x и сборът по ред и стълб е S. Тогава, ако съберем сборовете по всички редове без първия и по всички стълбове, всяко от числата от 1 до 13 ще е броено по два пъти (1 т.), освен числото x, което ще е броено 4 пъти. (1 т.) Полученият сбор е $7S = 13.14 + 2x$. (1 т.) Тъй като $S = 4x$, от равенството $28x = 13.14 + 2x$ намираме $x = 7$ (1 т.), откъдето $S = 28$. Показани са две възможни разположения. За верен пример (3 т.), от които (1 т.) за частичен резултат.

7	7	7	7
1	13	10	4
11	2	3	12
9	6	8	5

7	7	7	7
1	13	10	4
12	3	2	11
8	5	9	6

Задача 7.4. Едно естествено число се нарича *интересно*, ако след прибавяне към него на сумата от цифрите му, се получава число, записано със същите цифри. Например числата 45, 279 и 9324 са *интересни*, защото $45+4+5=54$, $279+2+7+9=297$ и $9324+9+3+2+4=9342$.

а) Възможно ли е някое *интересно* число да е просто?

б) Да се докаже, че съществуват безброй много *интересни* числа със сбор от цифрите 36.

в) Да се докаже, че съществуват безброй много *интересни* числа, които са точни квадрати.

Решение: а) Ще използваме, че всяко естествено число и сборът от цифрите му дават един и същ остатък при деление на 9. (1 т.) Ако n е произволно *интересно* число със сума от цифрите s, то n и s дават един същ остатък x при деление на 9. От друга страна, числото $n+s$ трябва да има същите цифри като n и следователно трябва да дава остатък x при деление на 9. Получаваме, че числата $x+x$ и x трябва да дават един и същ остатък при деление на 9. Това е възможно само ако $x=0$, т.е. ако n се дели на 9. Следователно няма *интересно* число, което е просто. (1 т.)

б) Най-малкото естествено число със сбор от цифрите 36 е 9999, но то не е *интересно*. Затова ще потърсим *интересно* петцифрено число $\overline{abcde}$ такова, че $a+b+c+d+e=36$ и за което е вярно равенството $\overline{abcde}+36=\overline{abced}$. (1 т.) От последното следва, че $\overline{de}+36=\overline{ed}$. Чрез непосредствена проверка за цифрите d и e получаваме следните възможности: $15+36=51$, $26+36=62$, $37+36=73$, $48+36=84$ и $59+36=95$. С помощта на някоя от последните три можем да намерим *интересно* петцифрено число със сбор от цифрите 36, например $89937+36=89973$ (сборът от цифрите на 89937 е 36). (1 т.) Сега остава да забележим, че всички числа от вида $8990\ldots037$, където броят на нулите е произволен, са *интересни* и имат сбор от цифрите 36. (1 т.)

в) Единственото *интересно* двуцифрено число е 45, но то не е точен квадрат и при това няма точен квадрат, който да завършва на 45. Трицифрените *интересни* числа са 234, 279, 423, 468, 612, 657, 801 и 846. Нито едно от тях не е точен квадрат, като при това няма точен квадрат, който да завършва с последните две цифри на числата 234, 279, 423, 468, 612, 657 и 846. Изключение прави само числото 801. Затова да потърсим точен квадрат, последните две цифри на който са 01, който е *интересно* четирицифрено число, при това кратно на 9. (1 т.) Числата, които имат четирицифрени квадрати, завършващи на 01, са 49, 51 и 99. От тях $51^2=2601$ ни дава пример за *интересно* число, което е точен квадрат. Нещо повече, от това число лесно можем да получим, че числото $\left(5\cdot 10^n+1\right)^2=25\cdot 10^{2n}+10^{n+1}+1=25\underbrace{00\ldots0}_{n-2}1\underbrace{00\ldots0}_{n}1$ за всяко $n>2$ е пример за *интересно* число, което е точен квадрат. (1 т.)