60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Пътят между хижите "Бор" и "Иглика" се състои в изкачване от хижа "Бор" до връх Скала и слизане от връх Скала до хижа "Иглика". Турист, който се движи със скорост 3 *km/h* при изкачване и 6 *km/h* при слизане, стига от "Бор" до "Иглика" за 210 минути, а се връща за 4 часа. Намерете разстоянията между хижите и върха.

Решение: Да означим с x *km* разстоянието от хижа "Бор" до връх Скала и с y *km* – разстоянието хижа "Иглика" до връх Скала. Тогава в едната посока туристът се изкачва $t_1 = \frac{x}{3}$ часа и слиза $t_2 = \frac{y}{6}$ часа, а в другата посока се изкачва $t_3 = \frac{y}{3}$ часа и слиза $t_4 = \frac{x}{6}$ часа. Тъй като 210 *min* = 3,5 *h*, от условието имаме $t_1 + t_2 = 3{,}5$ и $t_3 + t_4 = 4$. Така получаваме системата: $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 3{,}5 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x + y = 21 \\ x + 2y = 24 \end{cases}$, откъдето (след като съберем и извадим левите и десните части на уравненията) $\begin{cases} x + y = 15 \\ y - x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 6,\ y = 9$ (отново след събиране и изваждане на левите и десните части на уравненията).

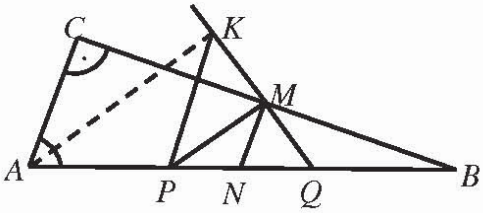
Следователно, разстоянията между хижите и върха са съответно са 6 *km* и 9 *km*.

<u>*Схема на оценяване*</u>: Общо **4 т.** за съставяне на модела и **3 т.** за решаване на системата. В рамките на тези точки се оценяват частични резултати: например **1 т.** за съображението, че на връщане изкачването става спускане, а спускането става изкачване; по **1 т.** за изразяване на времената на отиване и връщане; при липса на пълно решение на системата – **1 т.** за получаване на една или повече еквивалентни системи.

Задача 8.2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB = 12$ *см* и катет $AC = 4$ *см*. Точката M е средата на катета BC, а точките P и Q са разположени върху хипотенузата AB така, че $AP = PQ = QB$.

а) Да се намери $\angle PMQ$.

б) Ако ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича лъча $QM^{\rightarrow}$ в точката K, да се намери дължината на отсечката KP.



Решение: а) Нека N е средата на PQ. Тогава $AN = AP + PN = NQ + QB = NB$, т.е. N е средата на AB и следователно MN е средна отсечка в ΔABC. Получаваме, че $MN = \frac{1}{2}AC$. Тъй като $AB = 3AC$, то $PQ = AC$, откъдето $MN = \frac{1}{2}PQ$. Но MN е медиана в ΔPQM и следователно $\angle PMQ = 90°$.

б) От $MN \parallel AC$ следва, че $\angle NMC = 90°$ и $\angle BNM = \angle BAC$ (съответни), а от $PN = MN$ имаме, че $\angle NPM = \angle PMN$. Тогава $\angle BAC = \angle BNM = 2.\angle NPM$ и тъй като AK е ъглополовяща, получаваме $\angle NPM = \angle BAK$. Следователно $AK \parallel PM$. Заключаваме, че $\angle AKQ = 90^0$, т.е. ΔAQK е правоъгълен и тъй като KP е медиана в него, то $KP = \frac{1}{2}AQ = AC = 4\,см.$

Схема на оценяване: Общо **3 т.** за а) и **4 т.** за б), както следва: **1 т.** за въвеждане на средата N, **1 т.** за заключението $MN = \frac{1}{2}PQ$ и **1 т.** за завършване на а); **2 т.** за заключението $\angle BAC = 2\angle NPM$, **1 т.** за заключението $AK \parallel PM$ и **1 т.** за завършване на решението.

Задача 8.3. Да се намерят целочислените решения на уравнението $10x^2 + y^2 = 2011$.

Решение: Нека (x, y) е решение на уравнението. Тогава $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ също са негови решения. Затова ще предполагаме, че $x > 0$ и $y > 0$. От условието следва, че $y^2 = 2011 - 10x^2$, откъдето $2011 - 10x^2 > 0$. Следователно $x^2 < \frac{2011}{10} < 225 = 15^2$, т.е. $x \le 14$. При това условие с непосредствена проверка се установява, че уравнението има единствено положително решение $x = 7$, $y = 39$. Следователно всички целочислени решения на даденото уравнение са: $(7,39)$, $(-7,39)$, $(7,-39)$ и $(-7,-39)$.

Схема на оценяване: **1 т.** за съображението, че $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ са решения, ако (x, y) е решение на уравнението; **3 т.** за оценката $x \le 14$ или за точна оценка за y (**1 т.** за идея за оценка или за наличието на груба оценка); **2 т.** за разглеждане на всички случаи съгласно оценката (**1 т.** за частични разглеждания – поне три); **1 т.** за завършване на задачата.

Задачите са предложени, както следва:

зад. 8.1 – Чавдар Лозанов, зад. 8.2 – Чавдар Лозанов, зад. 8.3 – Веселин Ненков