60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 7.1. От град А за град Б тръгнал автобус, а осем минути по-късно след него потеглила кола. Двете превозни средства се движили с постоянни скорости, като тази на колата била с 50% по-голяма от тази на автобуса. Колата изпреварила автобуса на 24 *км* от А. Когато тя пристигнала в Б, на автобуса му оставали още 48 *км* път.

а) Определете скоростите на автобуса и колата.

б) Определете разстоянието от А до Б.

в) С каква скорост е трябвало да се движи автобусът от А до Б, за да стигне в Б едновременно с колата?

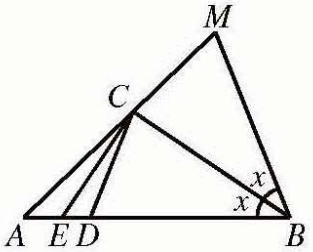
Решение: а) Понеже скоростта на колата е 1,5 пъти по-голяма от тази на автобуса, то за първите 24 *км* времето на автобуса трябва да е 1,5 пъти по-голямо от това на колата (нека последното е t минути). Понеже разликата на двете времена е $0,5t = 8$ минути, то $t = 16$ минути, а времето на автобуса е $1,5t = 24$ минути. Така автобусът изминава 1 *км* за минута, т.е. скоростта му е 60 *км/ч*. Скоростта на колата е $1,5.60 = 90$ *км/ч*.

б) Нека след изпреварването колата да се е движила още h часа. За това време тя е изминала $90h$ *км*, а автобусът – $60h$ *км*. Имаме $90h - 60h = 48$, откъдето $h = 1,6$ *ч*. Тогава $90h = 90.1,6 = 144$ *км* и разстоянието от А до Б е $24 + 144 = 168$ *км*.

в) Понеже 24 минути са 0,4 часа, автобусът е разполагал с $0,4 + 1,6 = 2$ часа за изминаване на 168 *км*, т.е. скоростта му е трябвало да бъде $168 : 2 = 84$ *км/ч*.

<u>*Схема на оценяване*</u>: а) **2 т.**, от които **1 т.** за правилно съставяне на уравнение и **1 т.** за намиране на отговорите; б) **3 т.**, от които **1 т.** за правилно съставяне на уравнение и **2 т.** за завършване (**1 т.** , ако е намерена само втората част от пътя); в) **2 т.**, от които **1 т.** за откриване на времето за пътуване и **1 т.** за завършване на решението.

Задача 7.2. Даден е триъгълник ABC и точки E и D върху страната AB така, че $\angle ACE = \angle ECD = 12°$. Да се намери $\angle ABC$, ако $\angle ECB = 90°$ и $AC + CD = AB$.



Решение: Върху лъча $AC^{\rightarrow}$ построяваме точка M така, че $AM = AC + CD$. Тогава $CD = CM$ и $\angle DCB = \angle BCM = 78°$. Следователно $\Delta DCB \cong \Delta MCB$ (I признак), откъдето $\angle CBD = \angle CBM = x$. От теоремата за сбора на ъглите в ΔACB намираме $\angle BAC = 180° - (90° + 12° + x) = 78° - x$. Тъй като ΔBMA е равнобедрен, за сбора на ъглите му имаме $4x + 78° - x = 180°$, откъдето $x = 34°$ и $\angle ABC = 34°$.

Схема на оценяване: **2 т.** за допълнителното построение (точка M); по **1 т.** (общо **4 т.**) за установяване, че $\angle DCB = \angle BCM = 78°$, $\Delta DCB \cong \Delta MCB$, $\angle CBD = \angle CBM$ и $\angle BAC = 78° - \angle ABC$; **1 т.** за завършване на решението.

Задача 7.3. Квадратна градина е разделена на 25 квадратни лехи с лица по 1 *кв. м.* Съседни наричаме лехите с обща страна. В някои от лехите са посадени цветя. Лехите, в които има цветя, остават с цветя и през следващата година. Ако някоя леха няма цветя, то на следващата година в нея поникват цветя само ако тя има поне две съседни лехи с цветя.

а) Възможно ли е в 14 поредни години лехите с цветя да са все различен брой?

б) Колко най-малко лехи трябва да се засадят, за да може след известно време във всички лехи да има цветя?

Решение:

6	5	1	13	14
1	4	5	12	13
1	3	6	11	12
1	2	7	10	11
1	1	8	9	1

а) Да. Един възможен начин е показан в таблицата, като числата показват номерата на годините, през които за пръв път се появяват цветя в съответните лехи (началното засаждане съответства на полетата с 1).

б) Ако посадим цветя в петте лехи по някой диагонал, след пет години във всички лехи ще има цветя. Ако сме посадили цветя в не повече от четири лехи, то обиколката на цветната площ е не повече от 16 *м*. При поява на цветя в нова леха тази обиколка не нараства, понеже от нея се премахват поне 2 *м* (заради съседните засадени лехи) и се добавят не повече от 2 *м* (заради съседните незасадени лехи). Ако във всички лехи имаше цветя, обиколката щеше да стане 20 *м*, така че това е невъзможно. Така търсеният минимален брой лехи е 5.

Схема на оценяване: а) **3 т.**, от които **2 т.** за показано подходящо начално засаждане и **1 т.** за обяснение защо примерът работи (само отговор "да" без аргументация не се оценява); б) **4 т.**, от които **1 т.** за декларирана верен отговор, **1 т.** за показано подходящо начално засаждане и **2 т.** за доказателство за минималност.

Задачите са предложени, както следва:

зад. 7.1 – Ивайло Кортезов, зад. 7.2 – Иван Ангелов, зад. 7.3 – Ивайло Кортезов