

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 6.1. Николай има два кашона с форма на правоъгълен паралелепипед и с размери съответно $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 60\text{ cm}$ и $80\text{ cm} \times 70\text{ cm} \times 60\text{ cm}$. Колко най-много кутии със същата форма и с размери $20\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ е възможно Николай да постави в кашоните?

Решение: Намираме обемите V_1 , V_2 и V_3 съответно на първия кашон, втория кашон и кутиите: $V_1 = 10 \cdot 10 \cdot 6 = 600\text{ dm}^3$, $V_2 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336\text{ dm}^3$ и $V_3 = 2 \cdot 2 \cdot 1,5 = 6\text{ dm}^3$. Като разделим V_1 на V_3 и V_2 на V_3 , получаваме, че в големия кашон Николай може да постави най-много 100 кутии, а в малкия – най-много 56 кутии.

Реализация. В първия кашон поставяме кутиите по следния начин: 20 см на ръб 1 м и 15 см на ръб 60 см; така получаваме един пласт от $5.4 = 20$ кутии и е достатъчно да образуваме пет пласта (това е възможно, защото $100 : 20 = 5$). Във втория кашон поставяме кутиите по следния начин: 15 см на ръб 70 см и 20 см на ръб 60 см; по този начин на стената $70\text{ cm} \times 60\text{ cm}$ поставяме два реда с по 3 кутии, т.е. общо 6 кутии, които в тази стена заемат правоъгълник с размери $30\text{ cm} \times 60\text{ cm}$; образуваме общо четири пласта (това е възможно, защото $80 : 20 = 4$) и по този начин нареждаме общо 24 кутии, запълвайки паралелепипед с размери $30\text{ cm} \times 60\text{ cm} \times 80\text{ cm}$; в оставащия паралелепипед $40\text{ cm} \times 60\text{ cm} \times 80\text{ cm}$ най-напред на ръб 60 см поставяме 4 кутии по ръб 15 см и в стената $60\text{ cm} \times 80\text{ cm}$ получаваме 4 реда с по 4 кутии (общо 16 кутии); образуваме общо два пласта (това е възможно, защото $40 : 20 = 2$), като по този начин нареждаме общо $16 \cdot 2 = 32$ кутии.

Схема на оценяване: по **1 т.** за намиране на обемите на кашоните и кутията – общо **3 т.**, **1 т.** за оценяване броя на кутиите, които могат да бъдат поставени, **1 т.** за правилно попълване на първия кашон и **2 т.** за правилно попълване на втория; ако са реализирани екстремалните попълвания без намиране на обеми – **7 т.**

Задача 6.2. В касичката си Валентин събира само монети. Един ден той решил да преброи паричките в нея. Оказалось се, че половината от всички монети плюс една били от 1 лев. Четири десети от останалите и още 4 монети били от 50 стотинки. Десет процента от новия остатък и още 3 монети били от 20 стотинки, а последните 42 монети били от 10 стотинки. Колко са монетите в касичката на Валентин и каква е тяхната стойност в лева?

Решение: Ще решим задачата отзад напред. Вторият остатък съдържа монети само от 20 ст. и 10 ст. Ако 3 монети от 20 ст. бяха монети от 10 ст., то монетите от 20 ст. щяха да съставляват 10% от втория остатък. Следователно 90% от втория остатък съдържа $42 + 3 = 45$ монети. Оттук намираме, че вторият остатък е 50 монети ($90\% \text{ от } 50 = 45$). Първият остатък съдържа 50 монети от 20 ст. и 10 ст., както и монети от 50 ст. Ако 4 монети от 50 ст. бяха монети от другия вид (20 ст. и 10 ст.), то монетите от 50 ст. щяха да съставляват 0,4 части от първия остатък. Следователно 0,6 части от първия остатък съдържа $50 + 4 = 54$ монети. Оттук намираме, че първият остатък е 90 монети ($0,6 \cdot 90 = 54$). В касичката има 90 монети от 50 ст., 20 ст. и 10 ст., както и монети от 1 лев. Ако една монета от 1 лев беше монета от другия вид (50 ст., 20 ст. и 10 ст.), то монетите от 1 лев щяха да бъдат половината от всички монети. Следователно половината от всички монети съдържа $90 + 1 = 91$ монети. Оттук намираме, че всички монети са $91 \cdot 2 = 182$ на брой. Монетите от 1 лев са $\frac{1}{2} \cdot 182 + 1 = 92$ и стойността им в лева е 92. Останалите монети са $182 - 92 = 90$. Монетите от 50 ст. са $0,4 \cdot 90 + 4 = 40$ и стойността им е 20 лв. Новият остатък монети е $90 - 40 = 50$. Монетите от 20 ст. са $0,1 \cdot 50 + 3 = 8$ и стойността им е 1,60 лв. Стойността на монетите от 10 ст. е $42 \cdot 0,1 = 4,20$ лв. За общата стойност на всички монети получаваме:

$$92 + 20 + 1,60 + 4,20 = 117,80 \text{ лв.}$$

Схема на оценяване: **5 т.** за намиране на общия брой 182 на монетите и **2 т.** за намиране на стойността им в лева.

Задача 6.3. В таблица $n \times n$ по един от главните диагонали са поставени пионки. На един ход е позволено произволни две пионки да се преместят в съседна горна клетка. Възможно ли е по този начин всички пионки да се преместят на най-горния ред, ако:

- a) $n = 9$;
- b) $n = 2011$?

Решение: Ясно е, че пионката в горния край на диагонала не може да се мести. Останалите пионки трябва да обходят еднократно всички полета над главния диагонал, върху който са разположение пионките, т.е. преместването на пионките от диагонала към най-горния ред представлява преброяване на клетките над главния диагонал. Тъй като на всеки ход се местват по две пионки, то за да е възможно исканото преместване, трябва броят на клетките над главния диагонал да е четно число.

a) Възможно е. Броят на клетките над главния диагонал е:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36,$$

което е четно число и следователно е изпълнено необходимото условие за осъществяване на исканото преместване. Ще посочим един начин за реализация на преместването. Да номерираме пионките отгоре надолу по главния диагонал последователно с числата от 1 до 9. Както беше отбелязано, пионката с № 1 не се мести. На първия ход преместваме пионките с № 2 и с № 9, при което пионката с № 2 отива на най-горния ред, а пионката с № 9 отива на реда на пионката с № 8. На втория ход преместваме пионките с № 3 и с № 7, при което пионката с № 3 отива на втория ред

отгоре надолу, а пионката с № 7 отива на реда на пионката с № 6. На третия ход преместваме пионките с № 3 и с № 5, при което пионката с № 3 отива на най-горния ред, а пионката с № 5 отива на реда на пионката с № 4. След тези три хода пионките с №№ 1, 2 и 3 са на най-горния ред, а двойките № 4 и № 5, № 6 и № 7, № 8 и № 9 са намират на едни и същи редове, съответно на четвъртия, шестия и осмия ред отгоре надолу. С три хода преместваме пионките с № 4 и с № 5 на най-горния ред, с пет хода преместваме пионките с № 6 и с № 7 на най-горния ред и с още седем хода преместваме пионките с № 8 и с № 9 на най-горния ред. Общият брой ходове е $3+3+5+7=18$.

а) Не е възможно. Броят на клетките над главния диагонал е:

$$1 + 2 + \dots + 2010 = (1 + 2010) \cdot 1005 = 2011 \cdot 1005,$$

което е нечетно число (произведение на нечетни числа) и следователно необходимото условие за осъществяване на исканото преместване е нарушено.

Схема на оценяване: общо **4 т.** за пълна реализация на преместване в случая а); частични кредити (без акумулиране): **1 т.** за посочен верен отговор, **2 т.** за преброяване на клетките над главния диагонал, **1 т.** за съображението, че броят на клетките над главния диагонал трябва да е четно число, **1 т.** за правилно започнато, но недовършено преместване; общо **3 т.** за б), от които **2 т.** за преброяване на клетките над главния диагонал (както в предната подточка – частични кредити без акумулиране).

Задачите са предложени, както следва:

зад. 6.1 – Ирина Шаркова, зад. 6.2 – Ирина Шаркова, зад. 6.3 – Ирина Шаркова