Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$3^{\cos x} + 3^{1-\cos x} = a$$

има точно едно решение в интервала $[0, \pi]$.

Задача 2. Точките O и I са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник ABC. Ъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D. Ако r е радиусът на вписаната окръжност, $OI = r$ и $ID = 2r$, да се намери $\sin \sphericalangle ACB$.

Задача 3. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число n произведението $\binom{n}{a_1}\binom{n}{a_2}\ldots\binom{n}{a_{2011}}$ се дели на n, е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ е равен на 1.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

math-bg.com