60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се реши уравнението $\sqrt{x-\sqrt{a}} = a-x$ в зависимост от стойностите на реалния параметър a.

Решение. Преди всичко трябва $a \geq 0$, като при $a = 0$ единственото решение е $x = 0$. Нека $a > 0$. Уравнението има смисъл при $x \geq \sqrt{a}$, като при $x > a$ то няма решение. Нека $\sqrt{a} \leq x \leq a$. Оттук следва и $a \geq \sqrt{a}$, т.е. $a \geq 1$ и при $0 < a < 1$ уравнението няма решение.

При $a \geq 1$ уравнението е равносилно с $x-\sqrt{a} = (a-x)^2$ или $x^2-(2a+1)x+a^2+\sqrt{a} = 0$. Корените на това квадратно уравнение са $x_1 = a+\sqrt{a}$ и $x_2 = a-\sqrt{a}+1$. Тъй като $a+\sqrt{a} > a$, то x_1 не е решение. Понеже $a-\sqrt{a}+1 \geq \sqrt{a}$ (това е равносилно с $(\sqrt{a}-1)^2 \geq 0$) и $a-\sqrt{a}+1 \leq a$ (това следва от $a \geq 1$), то x_2 е решение.

Окончателно, при $a < 0$ и $0 < a < 1$ уравнението няма решение, при $a = 0$ има решение $x = 0$ и при $a \geq 1$ решението е $x = a-\sqrt{a}+1$.

Инструкции за оценяване. 1 т. за случая $a = 0$; 1 т. за достигане до $x \in [\sqrt{a}, a]$ и $a \geq 1$; 2 т. за намиране на x_1 и x_2, 1 т. за отхвърляне на x_1; 1 т. за обосноваване, че x_2 е решение; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 9.2. Да се намерят всички прости числа p, за които съществуват взаимно прости естествени числа a и b, такива, че

$$p(a^2+ab+b^2) = 1501(a+b).$$

Решение. Ако допуснем, че има просто число r, делящо $a+b$ и a^2+ab+b^2, то от $b \equiv -a \pmod r$ и $0 \equiv a^2+ab+b^2 \equiv a^2-a^2+a^2 = a^2 \pmod r$ следва, че $r|a$ и $r|b$, което противоречи на $(a,b) = 1$. Следователно $(a+b, a^2+ab+b^2) = 1$. Тогава, тъй като $a+b|p(a^2+ab+b^2)$, то $a+b|p$. Но $a+b > 1$, така че $a+b = p$ и $a^2+ab+b^2 = 1501$.

От $1501 = (a+b)^2-ab = p^2-ab$ получаваме $p^2 > 1501$ и оттук $p \geq 39$. Освен това a и b са корени на квадратното уравнение (1) $x^2-px+p^2-1501 = 0$ и трябва дискриминантата D на това уравнение да е неотрицателна. От $D = 6004-3p^2 \geq 0$ получаваме $p^2 \leq 2001$ и значи $p \leq 44$.

Понеже p е просто число, остават възможностите $p = 41$ и $p = 43$. Сега пресмятаме, че при $p = 41$ корените на (1) са 5 и 36 (взаимно прости естествени числа), а при $p = 43$ те не са цели числа. Окончателно, $p = 41$.

Инструкции за оценяване. 3 т. за обосновано получаване на $a+b = p$ и $a^2+ab+b^2 = 1501$, 3 т. за достигане да $39 \leq p \leq 44$, 1 т. за окончателния отговор.

Задача 9.3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който H_a е ортоцентър на $\triangle BCD$, H_b е ортоцентър на $\triangle CDA$, H_c е ортоцентър на $\triangle DAB$ и H_d е ортоцентър на $\triangle ABC$. Да се докаже, че ако правите AC и H_aH_c са успоредни, но не съвпадат, то правите BD и H_bH_d са успоредни.

Решение. Имаме $AH_c \perp BD$ и $CH_a \perp BD$, откъдето $AH_c \| CH_a$ и следователно четириъгълникът AH_cCH_a е успоредник.

Да построим точката P така, че векторите $\overrightarrow{AH_c}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{CH_a}$ са равни. Тогава $PB \| AH_c \Rightarrow \sphericalangle PBD = 90^\circ$ и $PA \| BH_c \Rightarrow \sphericalangle PAD = 90^\circ$. Оттук, точката A лежи на описаната окръжност на $\triangle PBD$. Аналогично, точката C лежи на същата описана окръжност и четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност.

Да построим точката Q, диаметрално противоположна на C в тази окръжност. По обратния път на горното разсъждение установяваме, че QAH_dB е успоредник, $QA = BH_d$, и аналогично $QA = DH_b$, откъдето $BH_d = DH_b$, фигурата BH_dH_bD също е успоредник, и $BD \| H_bH_d$, както се искаше.

Инструкции за оценяване. 1 т. за доказателство, че AH_cCH_a е успоредник; 4 т. за доказателство, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан, 2 т. за довършване.

Задача 9.4. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които полиномът $f(x) = x^4 + x^3 - (a^2-1)x^2 + 2abx + a^2 - a - 6$ се дели на полинома $g(x) = x^2 - a^2$.

Решение. Лесно се вижда, че $a = 0$ не дава решение на задачата. Тъй като корените на делителя $g(x)$ са a и $-a$, при $a \neq 0$ условието е еквивалентно на $f(a) = f(-a) = 0$. Оттук получаваме системата $a^4 + a^3 - a^2(a^2-1) + 2a^2b + a^2 - a - 6 = 0$, $a^4 - a^3 - a^2(a^2-1) - 2a^2b + a^2 - a - 6 = 0$. След елиминиране на $a^3 + 2a^2b$ достигаме до квадратното уравнение $2a^2 - a - 6 = 0$ с корени $a_1 = 2$ и $a_2 = -\frac{3}{2}$. Сега от първото уравнение от горната система намираме $b = -\frac{a}{2}$, откъдето $b_1 = -1$ и $b_2 = \frac{3}{4}$. Следователно търсените стойности са $(a, b) = (2, -1)$ и $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$, като съответните разлагания са $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = (x^2-4)(x^2+x+1)$ и $x^4 + x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} = (x^2 - \frac{9}{4})(x^2+x+1)$.

Инструкции за оценяване. 1 т. за записване на системата $f(a) = f(-a) = 0$, 4 т. за получаване на уравнение за a, 2 т. за намиране на b при известно a.

Задача 9.5. Нека T е множеството от всички триъгълници ABC с радиуси r и r_a съответно на вписаната окръжност и на външновписаната окръжност срещу върха A, където r и r_a са фиксирани положителни числа. Да се докаже, че:

а) всички триъгълници в T имат една и съща дължина на височината от върха A;

б) измежду всички триъгълници в T най-малко лице има този, за който $AB = AC$.

Решение. а) Нека I и I_a са съответно центъровете на вписаната и външновписаната окръжност, а $AH = h_a$ е разстоянието от A до BC, $H \in BC$. Ако $IP \perp BC$, $P \in BC$, и $I_aQ \perp BC$, $Q \in BC$, имаме $\frac{AI}{AI_a} = \frac{r}{r_a}$. Аналогично, ако $IR \perp AH$, $R \in AH$, и $I_aS \perp AH$, $S \in AH$, то $\frac{AI}{AI_a} = \frac{h_a - r}{h_a + r_a}$. Оттук се вижда, че $h_a = \frac{2rr_a}{r_a - r}$ може да бъде

определено еднозначно по r и r_a, и следователно всички триъгълници от T имат равни височини през A.

б) От а) следва, че най-малко лице ще има този от триъгълниците в T, в който дължината на страната BC е минимална. Лесно се вижда, че четириъгълникът BI_aCI е вписан в окръжност k с диаметър II_a, като $II_a \geq r + r_a$ и равенство се достига, когато вписаната и външновписаната окръжност се допират. В същия случай мярката на $\sphericalangle BAC$ е максимална, а BC е хорда в k срещу ъгъл $90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$.

Получихме, че лицето на $\triangle ABC$ е минимално точно тогава, когато вписаната и външновписаната окръжност се допират. Последното е възможно само тогава, когато $AB = AC$.

Инструкции за оценяване. 2 т. за а); 2 т. за въвеждане на вписания четириъгълник BI_aCI с цел оценяване на дължината на BC; 3 т. за довършване.

Задача 9.6. Една редица от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се нарича n-добра, ако $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n$ и $x_i - i$ се дели на 3 за всяко $i = 1, \ldots, k$. Нека a_n е броят на n-добрите редици за фиксирано естествено число n. Да се докаже, че числото $a_{n+8} - a_n$ се дели на 3.

Решение. Ако $1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ е n-добра редица, то $x_2 - 1, x_3 - 1, \ldots, x_k - 1$ е $(n-1)$-добра редица. Вземайки пред вид и редицата с единствен член $x_1 = 1$ получаваме, че броят на n-добрите редици, които започват с 1, е $a_{n-1} + 1$. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_k$ е n-добра редица с $x_1 \geq 4$, то $x_1 - 3, x_2 - 3, \ldots, x_k - 3$ е $(n-3)$-добра редица. Оттук следва, че броят на n-добрите редици, незапочващи с 1, е a_{n-3}.

Горните разсъждения показват, че $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$. Пресмятаме първите няколко стойности на a_n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	1	2	3	5	8	12	18	27	40	59	87
$a_n \pmod 3$	1	2	0	2	2	0	0	0	1	2	0

Сега твърдението лесно следва по индукция. Базата за индукцията следва от таблицата. Нека $n \geq 4$ и $a_{k+8} \equiv a_k \pmod 3$ за всяко $k \leq n$. Тогава

$$a_{n+9} = a_{n+8} + a_{n+6} + 1 \equiv a_n + a_{n-2} + 1 = a_{n+1} \pmod 3,$$

което завършва доказателството.

Инструкции за оценяване. 4 т. за намиране на рекурентна връзка за a_n; 1 т. за пресмятане на първите членове на редицата; 2 т. за довършване на доказателството по индукция.

Автори на задачите:

Петър Бойваленков – 9.4, 10.1;

Иван Ланджев – 9.6(10.6), 10.4;

Николай Белухов – 9.3(10.3), 9.5(10.5);

Кероне Чакъряп – 9.1, 9.2 (10.2).