

Министерство на образованието и науката

56. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 14 април 2007 г.
11 клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които системата

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 4a + 6 \\ \cos x + \sin y = 3a + 2 \end{cases}$$

има решение.

Задача 2. Нека n е естествено число и $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ са положителни реални числа. Да се докаже неравенството

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n) + 2^{n-1} \left(\frac{1}{a_1 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2} + \dots + \frac{1}{a_n b_n} \right) \geq 2^{n-1}(n+2).$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. За множество A от реални числа означаваме с A^+ броят на различните числа, които могат да се получат като сбор на две (не непременно различни) числа от A , а с A^- броят на различните положителни числа, които могат да се получат като разлика на две числа от A . Нека A е такова множество с 2007 елемента, за което A^+ приема минимална възможна стойност. Да се намери A^- .