

**59^{ТА} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28. 02. 2010 г.**

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

Колеги, възможно е да имам някои технически грешки, за което моля да ме извините, така че не ми се доверявайте напълно, а си проверете отговорите.

$$12.1 \quad x^2 - (m+2)x + 5m - 11 = 0 \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{и} \quad x_{1,2} \in R \Rightarrow D > 0$$

$$(m+2)^2 - 4(5m-11) > 0 \quad m^2 + 4m + 4 - 20m + 44 > 0$$

$$m_1 = 4 \quad m_2 = 12 \quad M : m \in (-\infty; 4) \cup (12; +\infty)$$

$$\begin{aligned} f(m) &= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = \\ &= (m+2)[(m+2)^2 - 3(5m-11)] = m^3 - 9m^2 + 15m + 74 \end{aligned}$$

$$f'(m) = 3m^2 - 18m + 15 = 0$$

$$f(1) \max = 1 - 9 + 15 + 74 = 81 \quad (1; 81) \max \quad 5 \notin M$$

За съображение на $D > 0$ – 1 точка

За разписване на решенията на неравенството – 1 точка

За преобразуване на сумата на корените – 2 точки

За намиране на екстремума – 2 точки, за определяне на вид – 1 точка

$$12.2. \text{ a)} \quad VDCM \quad MH \perp ABCD \quad MH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}$$

$$DD_1 \perp AB_1 \quad VADD_1 \Rightarrow AD_1 = \frac{2a-a}{2} = \frac{a}{2}; \quad AD = a \quad DD_1 = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{2a+a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \quad V = \frac{1}{3} S_{ABCD} MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4b^2 - a^2} = \frac{a^2\sqrt{3}\sqrt{4b^2 - a^2}}{8}$$

За всеки отделен резултат (6 x 0,5 точки)

б) Ако $\exists \sigma(0, R) \Rightarrow 0 \in e \perp ABCD$ и минава през центъра на описаната окръжност $ABCD$

$ON \perp ABCD \quad MN \perp AB \Rightarrow ON \parallel MH;$

$OA = OB = OC = OD = OM = R \quad N$ – център на описана окръжност за $ABCD$

За всеки извод поотделно – 4 x 0,5 точки = 2 точки

$$VAON \quad ON = x \quad OA = R \Rightarrow R^2 = x^2 + a^2$$

$$ONHM \text{ – трапец правоъгълен} \Rightarrow ON = x, \quad NH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad MN = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}, \quad MP = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2} - x$$

$$\left| \begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2} - x\right)^2 \Rightarrow x = \frac{4b^2 - 2a^2}{4\sqrt{4b^2 - a^2}} \\ R^2 &= x^2 + a^2 \end{aligned} \right.$$

$$R^2 = \frac{4b^4 + 12a^2b^2 - 3a^4}{4(4b^2 - a^2)} \quad S = 4\pi R^2 = \pi \frac{4b^4 + 12a^2b^2 - 3a^4}{4b^2 - a^2}$$

За всяка връзка преди системата – (2 x 0,5 точки = 1 точка); за решаване на системата и извод за S – (1 точка)

$$12.3. 3^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \cdot 3^{x+1} - 2^{2x+2} = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 2^x \cdot 3^x \cdot 3 - 2^{2x} \cdot 2^2 = 0 / : 2^{2x} > 0 \text{ (1 точка)}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 4 = 0 \quad \text{пол. } \left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0 \text{ (0,5 точки)} \quad \text{и получаваме } t^2 + 3t - 4 = 0$$

$t_1 = -4$ не е реш. (0,5 точки)

$$t_2 = 1 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$1 + |a| \cdot 2^0 + (2-a) \cdot 2^0 = 3 \Leftrightarrow |a| = a \Rightarrow a \geq 0 \text{ (1 точка)}$$

$$\Rightarrow (2) \quad 4^x + a \cdot 2^x + (2-a) \cdot 2^{-x} = 3 \quad \text{пол. } 2^x = y > 0 \text{ и}$$

$$y^2 + ay + (2-a) \cdot \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow y^3 + ay^2 + 2-a - 3y = 0 \Leftrightarrow y^3 + ay^2 - y - 2y - a + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y(y^2 - 1) + a(y^2 - 1) - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + (a+1)y + a - 2) = 0 \text{ (1,5 точки)}$$

$$y = 1 \quad \text{или} \quad y^2 + (a+1)y + a - 2 = 0 \quad (3)$$

$$D = (a+1)^2 - 4(a-2) = a^2 - 2a + 9, \quad D > 0 \text{ за } \forall a \text{ (0,5 точка)}$$

За уравнението (3) имаме два корена y_1 и y_2

Трябва: 1 случай $y_1 = y = 1, \quad y_2 \leq 0$ или 2 случай $y_1 \leq 0, \quad y_2 \leq 0$.

- Ако $y_1 = 1, \quad 1 + (a+1) \cdot 1 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ (0,5 точки)}$

- Ако $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = -(a+1) \leq 0 \\ y_1 \cdot y_2 = (a-2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq -1 \\ a \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a \geq 2$ - уравненията са еквивалентни (1,5 точки)