

**59^{ТА} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28. 02. 2010 г.**

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

Колеги, възможно е да имам някои технически грешки, за което моля да ме извините, така че не ми се доверявайте напълно, а си проверете отговорите.

11.1. а) Отг. 4; 8; 16. (за верни формули на прогресиите – 1 точка, за вярно изразени връзки в задачата- 1 точка и за намерени 3 числа – 1 точка)

11.1. б) I прогресия има членове $a_1; a_2 \dots a_n$ II прогресия има членове $b_1; b_2 \dots b_n$

$$\frac{a_n}{b_1} = \frac{b_n}{a_1} = 4 \text{ и } \frac{S_{n_1}}{S_{n_2}} = 2 \text{ и } n_1 = n_2 = n \text{ (1 точка)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 4b_1 \\ \frac{S_{n_1}}{S_{n_2}} = 2 \\ b_n = 4a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (n-1)d_1 = 4b_1 \\ \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2b_1 + (n-1)d_2} \cdot n = 2 \\ b_1 + (n-1)d_2 = 4a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} = 26; \text{ За описание на всяко от трите}$$

равенства във втората система чрез съответните формули – **(1,5 точки)**. За вярно намерено отношение – **(1,5 точки)**.

11.2 а) $2 \cdot 4^x + (2a-1) \cdot 2^x - 4a^2 - 2a = 0 \quad a = -1 \Rightarrow 2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x - 2 = 0 \text{ (1т.)}$

пол. $2^x = y \Rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0 \quad y_1 = 2, y_2 = -\frac{1}{2} \text{ (1 т.)} \quad 2^x = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \quad 2^x = -\frac{1}{2} \text{ (1 т.)}$

б) $2y^2 + (2a-1)y - 4a^2 - 2a = 0 \text{ ако } x_{1,2} \in R$

$$\Rightarrow y_1, y_2 \in (0; x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 y_2 > 0 \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2a+1}{2} > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2} \\ \frac{-4a^2 - 2a}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \\ (2a-1)^2 - 8(-4a^2 - 2a) > 0 \end{cases}$$

(за всяка еквивалентна стъпка по 1 точка = 4 точки)

11.3. а) Означаваме $\angle BAC = \alpha$. $\angle CAP = \angle BAP = \frac{\alpha}{2}$.

За $VAPC$ $\frac{AO}{OP} = \frac{AC}{CP} = \cot g \frac{\alpha}{2} = 2 + \sqrt{3}$. $\tg \alpha = \frac{2 \tg \frac{\alpha}{2}}{1 - \tg^2 \frac{\alpha}{2}}$ **(1 точка)**

$$\tg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{(0,5 точки)}$$

$$\tg \alpha = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4\sqrt{3} - 6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ; \angle BAC = 30^\circ; \angle ABC = 60^\circ \quad \text{(1 точка)}$$

за преобразуване и 0,5 точки за извод = 1,5 точки)

6) $O_1M \perp O_2M$ - ъглополовящи на два съседни ъгъла.

$$\angle O_1MO_2 = 90^\circ \quad \angle ACO_1 = \angle MCO_1 \quad \angle BCO_2 = \angle MCO_2 \Rightarrow \angle O_1CO_2 = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle ACB \text{ (0,5т.)}$$

$$S_1 = S_{O_1O_2C} = \frac{1}{2} CO_1 \cdot CO_2 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} CO_1 \cdot CO_2 \quad S_2 = S_{O_1O_2M} = \frac{1}{2} MO_1 \cdot MO_2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{CO_1 \cdot CO_2}{MO_1 \cdot MO_2} \quad (\text{3 x 0,5 точки})$$

$$\text{В } VBCM \quad \angle B = 60^\circ; \quad CM = BM \Rightarrow MO_2 = CO_2 \quad (\text{0,5 точки})$$

$$\text{В } VAMC \quad \angle AMC = 120^\circ \quad \angle ACM = 30^\circ \quad \angle O_1MC = 60^\circ \quad \angle O_1CM = 15^\circ \quad (\text{0,5 точки})$$

$$\text{В } VO_1MC \quad \frac{CO_1}{MO_1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdot (1 \text{ точка})$$