59^{ТА} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28. 02. 2010 г.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

Колеги, възможно е да имам някои технически грешки, за което моля да ме извините, така че не ми се доверявайте напълно, а си проверете отговорите.

10.1. Върхът на параболата има координати $V\left(x_V;y_V\right)=V\left(-p;13-p^2\right)$. **(2 точки)**

Прилагаме Питагоровата теорема за

$x_V^2+y_V^2=5^2 \overset{2\ точка}{\Leftrightarrow} (-p)^2+\left(13-p^2\right)^2=25 \Leftrightarrow p^4-25p^2+144=0$ (2 точки)

Корените на уравнението са $p=\pm 3;\pm 4$. (1 точки)

10.2. а)

$$M=\left(\frac{a-9}{a+3\sqrt{a}+9}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+3}{a^{\frac{3}{2}}-27}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a}=\left(\frac{a-9}{a+3\sqrt{a}+9}\cdot\frac{a^{\frac{3}{2}}-27}{a^{\frac{1}{2}}+3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a}\overset{0,5\ точки}{=}$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-3^2}{a+3\sqrt{a}+9}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3-3^3}{\sqrt{a}+3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a}\overset{0,5\ точки}{=}\left(\frac{\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2+3\sqrt{a}+9}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-3\right).\left(\sqrt{a}\right)^2+3\sqrt{a}+9}{\left(\sqrt{a}+3\right)}\right)-\sqrt{a}\overset{0,5\ точки}{=}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{a}-3\right)^2}-\sqrt{a}\overset{0,25\ точки}{=}\left|\sqrt{a}-3\right|-\sqrt{a}\overset{1\ точка}{}$$

1 сл. При $\sqrt{a}-3\ge 0\Leftrightarrow a\ge 9\Rightarrow M=\sqrt{a}-3-\sqrt{a}=-3$

2 сл. $\sqrt{a}-3<0\Leftrightarrow\sqrt{a}<3\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a\ge 0\\ a<9\end{array}\right.\Rightarrow M=-\sqrt{a}+3-\sqrt{a}=3-2\sqrt{a}$ (за извод **0,25 точки**)

б) $-x^2>-2\sqrt{3}x+x-2\sqrt{3}\Leftrightarrow x^2-\left(2\sqrt{3}-1\right)x-2\sqrt{3}<0\Rightarrow x\in\left(-1;2\sqrt{3}\right)$ **(1,5 точки)**

$M=-3$ не е решение на неравенството **(0,5 точки)**

$M=3-2\sqrt{a}$ **(0,5 т.)** е решение на неравенството при

$\left|\begin{array}{l}-1<3-2\sqrt{a}<2\sqrt{3}\\ a\ge 0\\ a<9\end{array}\right.$ (1 т.) $\Rightarrow a\in[0;4)$ **верен извод** от съобразяване на сечение на интервали **– (0,5 т.)**

10.3 Около четириъгълниците ADPM и DBEP съответно може да се опише окръжност. **(0,5 т.)** Тогава $\angle PAM=\angle PDM$ **(1,5 т.)** и $\angle PBD=\angle PED$. **(1,5 т.)** Но $\angle PAM=\angle PBD$. **(1,5 т.)** Оттук следва, че $\angle PED=\angle PDM$. **(0,5 т.)** Аналогично се доказва, че $\angle PDE=\angle DMP$. **(0,5 т.)** Тогава $\Delta MPD:\ \Delta DPE$ **(0,5 т.)** и $\frac{PD}{PE}=\frac{PM}{PD}$, **(0,25 т.)** откъдето получаваме $PD^2=PE.PM$. **(0,25 т.)**