59ТА НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28. 02. 2010 г.

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

Колеги, възможно е да имам някои технически грешки, за което моля да ме извините, така че не ми се доверявайте напълно, а си проверете отговорите.

9.1 а) За $x \neq -\frac{5}{3}$, **(0,25 т.)** полагаме $y = \frac{2x^2-3x+5}{3x+5}$ **(0,25 т.)**

тогава $y + 2.\frac{1}{y} = 3 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 2$ **(1 т.)**

$\frac{2x^2-3x+5}{3x+5} = 1 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$ **(1 т.)** $\frac{2x^2-3x+5}{3x+5} = 2 \Rightarrow x_3 = 5,\quad x_4 = -\frac{1}{2}.$ **(1 т.)**

б) $\left|\begin{array}{l} x^4+y^4 = 17(x+y)^2 \\ xy = 2(x+y) \quad /^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x^4+y^4 = 17(x+y)^2 \\ (x+y)^2 = \frac{x^2y^2}{4} \end{array}\right. \overset{0,5\ точки}{\Longrightarrow} x^4+y^4 = \frac{17}{4}x^2y^2$

$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - \frac{9}{4}x^2y^2 = 0$ **(0,25 т.)** от второто уравнение на системата получаваме

$(x^2-y^2)^2 - 9(x+y)^2 = 0 \overset{0,25\ т.}{\Longleftrightarrow} (x^2-y^2+3(x+y))(x^2-y^2-3(x+y)) \overset{0,25\ т.}{=}$

$= (x+y)^2(x-y+3)(x-y-3) = 0$ **(0,5 т.)** Тогава системата е равносилна с

$\left|\begin{array}{l} x+y=0 \\ xy = 2(x+y) \end{array}\right.$ *или* $\left|\begin{array}{l} x-y+3=0 \\ xy = 2(x+y) \end{array}\right.$ *или* $\left|\begin{array}{l} x-y-3=0 \\ xy = 2(x+y) \end{array}\right.$ **(1 т.)**

(0; 0), (6;3) (1; – 2), (3; 6) и (– 2; 1) са решения и на дадената система. **(0,75 т.)**

9.2. $\frac{3(x-2)+4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)} = 1$ ДО $x \in (-\infty;-1) \cup \left(-1;\frac{1}{2}\right] \cup (1;+\infty)$

$3x - 6 + 4\sqrt{2x^2-3x+1} = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2-3x+1} = 2x^2 - 3x + 1 + 3$ **(2 т.)**

пол. $\sqrt{2x^2-3x+1} = u$ **(1 т.)** $u^2 - 4u + 3 = 0 \Rightarrow u_1 = 1,\quad u_2 = 3$ **(1 т.)**

$\sqrt{2x^2-3x+1} = 1 \quad /^2 \Rightarrow$ Извод за $x_1 = 0;\ x_2 = 1,5.$ **(1, 5 т.)**

$\sqrt{2x^2-3x+1} = 3 \quad /^2 \Rightarrow$ Извод за $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}$ **(1,5 т.)** защото 4-те числа са и от ДО.

9.3. а) От върховете, А и *B* на квадрата *QM* се вижда под равни ъгли <*QAM*=<*QBM*=45°. Следователно около четириъгълника *ABMQ* може да се опише окръжност. **(1 т.)** В този четириъгълник <*ABM*=90° =.> <*AQM*=90°, т.е. $MQ \perp AP$. **(2 т.)**
б) Аналогично около четириъгълника *ANPD* може да се опише окръжност и <*ANP*=90°. $AM \perp PN$. **(2 т.)** Следователно от точки С, *Q, N* отсечката *PM* се вижда под прав ъгъл. **(1 т.)** Следователно *PM* е диаметър на окръжност минаваща през С, *Q, N.* **(1 т.)**