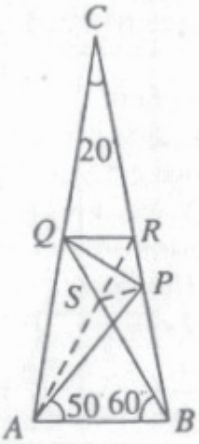
Тема за 8 клас

Задача 1. Иван и Петър се спускат с шейни от един хълм. Иван се спуска с ускорение 0,15 m/s^2, а Петър – с ускорение 0,2 m/s^2. Иван започва спускането 10 s преди Петър и когато го завършва, на Петър му остават още 30 m. Да се намери дължината на пързалката. (При спускане считаме движението за равноускорително с ускорение a m/s^2, като дължината S на изминатия път в метри е $S=\frac{at^2}{2}$, където t е времето, измерено в секунди.)

Решение: Нека t е времето на Иван в секунди. Тогава той изминава $\frac{0,15t^2}{2}$ m от началото до края на пързалката (1 т.). За $(t-10)$ s Петър изминава $\frac{0,2(t-10)^2}{2}$ m и е на 30 m от края на пързалката (1 т.). Следователно $\frac{0,15t^2}{2}-\frac{0,2(t-10)^2}{2}=30$ (2 т.), откъдето получаваме $t^2-80t+1600=0$ или $(t-40)^2=0$ и $t=40$ s (1 т.). Като заместим в $\frac{0,15t^2}{2}$, получаваме, че дължината на пързалката е 120 m (1 т.).

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC=BC$) с $\angle ACB=20°$. Симетралата на страната BC пресича страната AC в точка Q, а точката P от страната BC е такава, че $BP=BA$. Да се намери мярката на $\angle PQB$.



Решение: Тъй като $QB=QC$, то $\angle QBC=\angle QCB=20°$. Тогава $\angle QBA=60°$ (1 т.). Построяваме $QR \parallel AB$, $R\in BC$. Тогава $ABRQ$ е равнобедрен трапец с $\angle QBA=\angle RQB=60°$ (1 т.). Ако $AR\cap BQ=S$, то триъгълниците ABS и SQR са равностранни и $AS=AB=BS$, $SQ=QR=RS$ (1 т.). Тъй като $BP=BA$, то $PB=AB=BS$.

Заключаваме, че ΔPSB е равнобедрен. Тогава $\angle BSP=\angle BPS=\frac{1}{2}(180°-\angle PBS)=80°$ и $\angle ASP=360°-(\angle BPS+\angle ABP+\angle SAB)=140°$ (1 т.). Оттук $\angle PSR=180°-\angle ASP=40°=\angle PRS$, т.е. $PS=PR$ (1 т.). От $SQ=QR$ и $PS=PR$ следва, че $\Delta SPQ\equiv\Delta RPQ$ и

$\angle PQB=\angle SQP=\frac{1}{2}\angle RQB=\frac{1}{2}60°=30°$ (1 т.).

Задача 3. Да се намери най-малкото просто число p, за което уравнението $p(31x^2-x+24)=6y^3$ няма решение в цели числа x и y.

Решение: Ако $p=2$, уравнението е $31x^2-x+24=3y^3$ или $31x^2-x=3(y^3-8)$. Очевидно това уравнение има решение $x=0, y=2$ (1 т.).

Ако $p=3$, уравнението е $31x^2-x+24=2y^3$. При $x=1$ ще получим $54=2y^3$ или $27=y^3$, откъдето е ясно, че двойката $x=1, y=3$ е решение на уравнението (1 т.).

При $p=5$ уравнението е $5\left(31x^2-x+24\right)=6y^3$, т.е. y трябва да се дели на 5. При $y=5$ получаваме $31x^2-x=2.63$, откъдето $31x^2+62x-63x-2.63=0$, т.е. $31x(x+2)-63(x+2)=0$ и $(x+2)(31x+63)=0$. Следователно $x=-2, y=5$ е решение на уравнението (1 т.).

Нека $p=7$. За да има уравнението решение, трябва y да се дели на 7, откъдето можем да запишем $y=7t$, t – цяло (1 т.). След заместване в уравнението и съкращаване получаваме $31x^2-x+24=6\cdot 49t^3$, откъдето следва, че $31x^2-x+24$ трябва да се дели на 49 (1 т.). Но $31x^2-x+24=31\left(x+1\right)^2-7\left(9x+1\right)$ и за да се дели $31x^2-x+24$ на 7, трябва $x+1$ да се дели на 7. Но тогава $31\left(x+1\right)^2$ ще се дели на 49 и за да се дели $31\left(x+1\right)^2-7\left(9x+1\right)$ на 49, трябва $7\left(9x+1\right)$ да се дели на 49, т.е. $9x+1$ да се дели на 7 (1 т.). Не е възможно обаче едновременно $x+1$ и $9x+1$ да се делят на 7, понеже $9\left(x+1\right)-\left(9x+1\right)=8$. Следователно при $p=7$ даденото уравнение няма решение (1 т.).

Фактът, че $31x^2-x+24$ не се дели на 49 (4 т.), може да бъде доказан и така: Първо проверяваме кога $31x^2-x+24$ се дели на 7, като разглеждаме всички възможни остатъци на x по модул 7. Забелязваме, че $31x^2-x+24\equiv 0\left(\bmod 7\right)$ само ако $x\equiv -1\left(\bmod 7\right)$. Но ако $x=7k-1$, $k\in\mathbb{Z}$, то $31x^2-x+24=49\left(31k^2-9k\right)+56$, което не се дели на 49.

Задача 4. Град има формата на квадрат $n\times n$, разделен на квартали 1×1. В някои от кварталите има клетки на един от три възможни мобилни оператора. Всяка клетка обслужва квартала, в който се намира, както и съседните (по страна или връх) квартали. Хигиенните норми забраняват монтирането на повече от една клетка в квартал. Монтирани са по-малко от 2010 клетки и всеки квартал се обслужва от всеки оператор. Намерете най-голямата възможна стойност на n.

Решение: Ще задаваме позицията на даден квартал с двойка координати $(i;j)$, $i,j=1,2,\ldots,n$ (1 т.). Понеже има по-малко от 2010 клетки, то някой оператор (да го наречем **A**) има по-малко от $670=2010:3$ клетки (1 т.). Да отбележим, че ако координатите на два квартала се различават с повече от 2, те нямат общ съседен квартал и следователно не могат да се обслужват от една клетка (1 т.). Нека $n\geq 76$ и да разгледаме кварталите $(3i-2;3j-2)$ при $i,\ j=1,2,\ldots,26$. Координатите на всеки два от тези квартали се различават поне с 3 (при съседни стойности на i и j те се различават точно с 3) и следователно разглежданите квартали трябва да се обслужват от различни клетки на оператора **A**. Но това е невъзможно, защото броят на тези квартали е поне $26.26=676$, а $676>670$. Следователно $n<76$ (1 т.).

Ако $n=75$, а **B** и **C** са другите два оператора, можем да монтираме клетките по следния начин:

– на оператора **A** в кварталите от вида $(3i-1;3j-1)$ при $i,\ j=1,2,\ldots,25$ (1 т.)

– на оператора **B** в кварталите от вида $(3i;3j-1)$ при $i,\ j=1,2,\ldots,25$, както и в тези от вида $(1;3j-1)$ при $j=1,2,\ldots,25$ (1 т.)

– на оператора **C** в кварталите от вида $(3i-1;3j)$ при $i,\ j=1,2,\ldots,25$, както и в тези от вида $(3i-1;1)$ при $i=1,2,\ldots,25$ (1 т.).

Всеки квартал в града се обслужва и от трите оператора. Наистина, кварталите $(3i-1;3j-1)$, $(3(i+1)-1;3j-1)$, $(3i-1;3(j+1)-1)$ и $(3(i+1)-1;3(j+1)-1)$ при $i,\ j=1,2,\ldots,24$ са ъглови за квадрат 4×4 и във всеки от тях е разположена клетка на оператора **A**. Тези четири клетки обслужват всички квартали от квадрата 4×4 и следователно всички квартали в града се обслужват от оператора **A**. Аналогично се съобразява, че и клетките на операторите **B** и **C**, разположени по описания начин, също обслужват всички квартали в града. При това общият брой клетки е $3.25.25+2.25=1925<2010$. Заключаваме, че отговорът на задачата е $n=75$. По-долу е показано разположението на клетките при $i,\ j=1,2,3,4,5$.

	B			B			B			B			B	
C	A	C		A	C		A	C		A	C		A	C
	B			B			B			B			B	
C	A	C		A	C		A	C		A	C		A	C
	B			B			B			B			B	
C	A	C		A	C		A	C		A	C		A	C
	B			B			B			B			B	
C	A	C		A	C		A	C		A	C		A	C
	B			B			B			B			B	
C	A	C		A	C		A	C		A	C		A	C
	B			B			B			B			B	