Тема за 6 клас

Задача 1. Подредете изразите по големина на стойностите им:

$$A = 3^{30} - 10^{15},$$
$$B = 4^{15} + \left|4^{15} - 3^{20}\right| - 3^{20},$$
$$C = 5^{-15} - 2^{-35},$$
$$D = 2^{-1} - 0,2^{-1} + 0,5^{-2}.$$

Решение:

$$A = 3^{30} - 10^{15} = 3^{2.15} - 10^{15} = 9^{15} - 10^{15} < 0.$$

От $4^{15} - 3^{20} = 2^{3.10} - 3^{2.10} = 8^{10} - 9^{10} < 0$ следва, че $\left|4^{15} - 3^{20}\right| = 3^{20} - 4^{14}$ и следователно $B = 4^{15} + \left|4^{15} - 3^{20}\right| - 3^{20} = 0$.

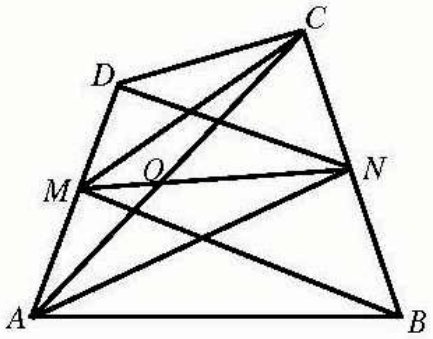
$$C = 5^{-15} - 2^{-35} = \frac{1}{5^{15}} - \frac{1}{2^{35}} = \frac{2^{7.5} - 5^{3.5}}{5^{15}.2^{35}} = \frac{128^5 - 125^5}{5^{15}.2^{35}} > 0.$$

$D = 2^{-1} - 0,2^{-1} + 0,5^{-2} = \frac{1}{2} - 5 + 4 = -0,5$. Лесно проверяваме, че $A < -1 < D$.

Отговор: $A < D < B < C$

Схема за оценяване: по 1 т. за вярно пресмятане на всеки от четирите израза и 2 т. за верен краен отговор.

Задача 2. Точките M и N са средите съответно на страните AD и BC на четириъгълника $ABCD$, а отсечката MN разполовява диагонала AC. Ако лицето на ΔBCM е 10 кв. см, да се намери лицето на ΔAND.



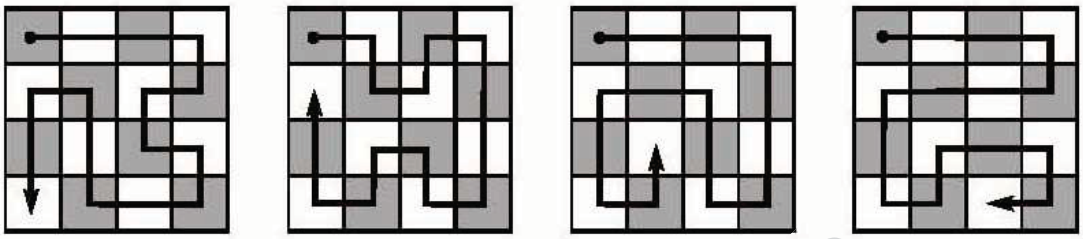
Решение: Лицето на фигурата XYZ ще означаваме с S_{XYZ}, като лицата в решението са в квадратни сантиметри. Нека O е средата на диагонала AC.

Триъгълниците MBN и MNC имат една и съща височина съответно към равните страни BN и CN в тях. Следователно $S_{MBN} = S_{MNC}$. Заключаваме, че $S_{MNC} = 5$. Ако означим $S_{MOC} = x$, то $S_{ONC} = 5 - x$. Триъгълниците AOM и MOC имат една и съща височина съответно към равните страни AO и CO в тях. Следователно $S_{AOM} = x$. По аналогичен начин заключаваме, че $S_{ANO} = S_{ONC} = 5 - x$. Сумираме лицата на ΔAOM и ΔANO и получаваме, че $S_{ANM} = x + 5 - x = 5$. Триъгълниците ANM и MND мат една и съща височина съответно към равните страни AM и DM в тях. Оттук $S_{AND} = 2S_{ANM} = 10$.

Схема на оценяване: 2 т. за $S_{MNC} = 5$; 1 т. за изразяване на S_{AOM} чрез S_{MOC}; 1 т. за изразяване на S_{ANO} чрез S_{ONC}; 1 т. за $S_{ANM} = 5$; 1 т. за $S_{AND} = 10$.

Задача 3. Полетата на шахматна дъска с n реда и n стълба, където $n \geq 3$, са оцветени по обичайния начин в черно и бяло. Пионка се намира в горното най-ляво поле, което е черно. За един ход тя преминава в съседно поле по хоризонтал или вертикал. Да се намери възможно най-малкото n, за което пионката може да достигне произволно бяло поле, преминавайки преди това точно по веднъж през всяко от останалите полета.

Решение: При преминаване от поле в поле се сменя цветът. Тъй като пионката тръгва от черно поле и трябва да обходи дъската, достигайки бяло поле, то това е възможно само ако броят на черните полета е равен на броя на белите (1 т.). При $n = 3$, черните полета са 5, а белите са 4 и следователно в този случай условието на задачата не може да се изпълни за нито едно бяло поле. Заключаваме, че търсеното n трябва да е по-голямо от 3 (1 т.). В случая $n = 4$ е показано как се достига до 4 от белите полета. За достигане на



останалите бели полета е достатъчно да се използва симетричността относно черния диагонал на квадрата. (За посочване на маршрут, по който се достига кое да е бяло поле – по 1 т. за всеки маршрут, но не повече от 4 т., освен когато са изчерпани всичките 8 маршрути или е спомената симетричността, при което се присъжда оставащата 1 т.)

Задача 4. Възрастите на петима ученика от едно училище са различни цели числа. Сборът от годините на кои да е четирима от тях е не по-малък от 45, а сборът от годините на кои да е трима от тях не надминава 40. Намерете сбора от годините на петимата, ако той е съставно число.

Решение: Нека възрастите на петимата са a, b, c, d и e. Можем да считаме, че $a < b < c < d < e$. От условието следва, че (1) $a + b + c + d \geq 45$ и (2) $c + d + e \leq 40$. (За подреждане на петимата ученици според възрастта им и установяване на двете неравенства, съответно за сбора на **четиримата най-млади** и **тримата най-възрастни** – общо 1 т.). Ако $c \geq 13$, то $d \geq 14$ и от (2) следва, че $e \leq 13$, т.е. $e < d$, което е невъзможно. Заключаваме, че $c \leq 12$ (1 т.). Ако $c \leq 11$, то $a + b \leq 9 + 10 = 19$ и от (1) следва, че $c + d \geq 26$. Оттук следват две неща: $d \geq 15$, защото $c \leq 11$ и $e \leq 14$, поради (2). Двете следствия не могат да бъдат изпълнени едновременно и следователно $c \geq 12$ (1 т.).

Доказахме, че $c \leq 12$ и $c \geq 12$, което е възможно само ако $c = 12$. Ако $d \geq 14$, то $e \geq 15$ и тогава $c + d + e \geq 12 + 14 + 15 = 41$. Последното е несъвместимо с (2) и следователно $d = 13$ (1 т.). Заключаваме още, че за e има само две възможности: $e = 14$ или $e = 15$ (1 т.). Тъй като $c + d = 25$, от (1) следва, че $a + b \geq 20$. От друга страна a и b са по-малки от 12 и следователно единствените възможности са: $a = 10$, $b = 11$ и $a = 9$, $b = 11$ (1 т.). Стигаме до следните 4 случая:

<u>*Първи случай*</u>: $a = 9$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$, $e = 14$ и $a + b + c + d + e = 59$.
<u>*Втори случай*</u>: $a = 9$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$, $e = 15$ и $a + b + c + d + e = 60$.
<u>*Трети случай*</u>: $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$, $e = 14$ и $a + b + c + d + e = 60$.
<u>*Четвърти случай*</u>: $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$, $e = 15$ и $a + b + c + d + e = 61$.

От получените стойности само 60 е съставно число, което е и отговорът на задачата (1 т.).

Забележка. За формулиране на отделни хипотези, включително и за познаване на крайния резултат – общо 1 т., т.е. при липса на доказателства независимо от наличието на правилни хипотези за отделните възрасти (броят на правилните хипотези е без значение) задачата се оценява най-много с 1 т.