Тема за 4 клас

Задача 1. Върху петте картички са написани числа. Наредете петте картички една след друга така, че да се получи възможно най-голямото число. Наредете петте картички една след друга така, че да се получи възможно най-малкото число. Намерете разликата на двете получени числа.

0	12	1	7	52

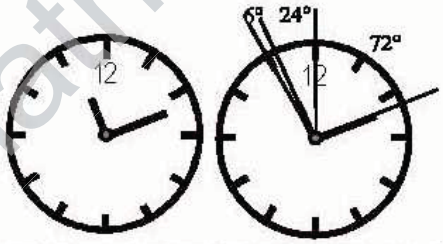
Решение: Най-голямото число, което може да се получи след нареждане на картичките, е 7 521 210 (**2 т.**), а най-малкото е 1 012 527 (**2 т.**). Разликата на двете числа е 6 508 683 (**2 т.**).

Задача 2. За 1 минута минутната стрелка на часовник се завърта на 6^0, а за 2 минути часовата стрелка се завърта на 1^0.

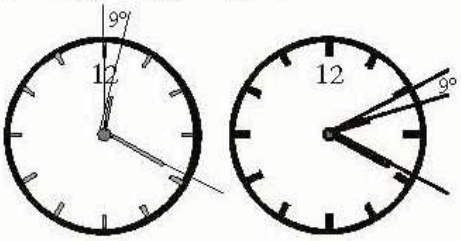
а) На колко градуса е равен ъгълът между часовата и минутната стрелка в 11 часа и 12 минути?

б) Посочете пример, в който ъгълът между часовата и минутната стрелка е равен на 99^0 и пример, в който ъгълът между часовата и минутната стрелка е равен на 39^0.

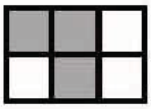
Решение: а) (**3 т.**) В 11 часа часовата стрелка сочи към 11, а минутната към 12. За 12 минути минутната стрелка се завърта на $12.6^0 = 72^0$ (1 т.). За 12 минути часовата стрелка се завърта на шест пъти повече градуси, отколкото за 2 минути, т.е. на $1^0.6 = 6^0$ (1 т.). (Оставащата 1 т. е за довършване на решението.) А за един час (интересува ни ъгълът от 11 часа до 12 часа) часовата стрелка се завърта на 30^0. Тъй като $30^0 - 6^0 = 24^0$, търсеният ъгъл е равен на $24^0 + 72^0 = 96^0$.



б) (**3 т.**) (**2 т.** за един верен отговор независимо от обосновките и 1 т. за втория верен отговор) В 12 часа и 18 минути, защото $18.6^0 - 9^0 = 108^0 - 9^0 = 99^0$ и в 14 часа и 18 минути, защото $18.6^0 - 69^0 = 108^0 - 69^0 = 39^0$.



Задача 3. Правоъгълник 3×2 е съставен от единични квадратчета, които са бели или черни, както е показано на фигурата.



а) Пребройте правоъгълниците от фигурата.

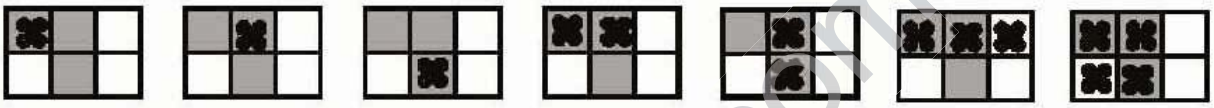
б) Пребройте правоъгълниците, в които черните единични квадратчета са повече от белите.

в) Сменете цвета на едно единично квадратче така, че броят на правоъгълниците, в които черните единични квадратчета са колкото белите, е възможно най-голям.

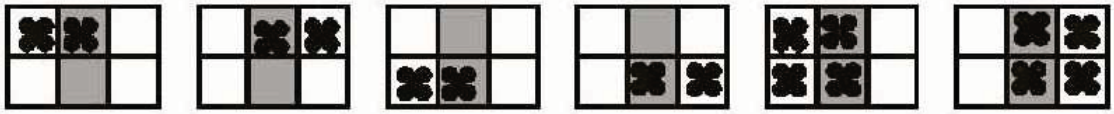
Забележка. Квадратът е частен случай на правоъгълник.

Решение а) (2 т.) В правоъгълника 3×2 има 6 единични квадратчета, 7 правоъгълника 2×1, 2 правоъгълника 3×1, 2 квадрата 2×2 и 1 правоъгълник 2×3. Общият брой е $6+7+2+2+1=18$. (За изпускане на 1 случай се отнема 1 т.; присъждане на 1 т. за поне два верни случая.)

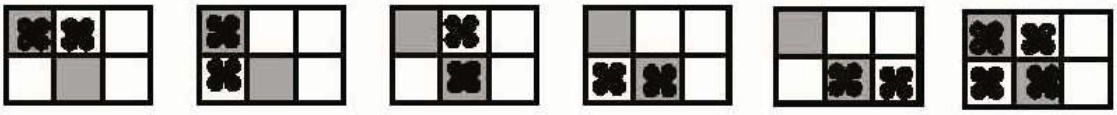
б) (2 т.) Трите черни единични квадрата изпълняват условието на задачата, защото в този случай броят на белите квадратчета е равен на нула. Това е в сила и за два от правоъгълниците 2×1, които са изцяло черни. В един от правоъгълниците 3×1 две от трите единични квадратчета са черни. В един от квадратите 2×2 три от четирите единични квадратчета са също черни. Търсеният брой е $3+2+1+1=7$. (За изпускане на 1 случай се отнема 1 т.; присъждане на 1 т. за поне два верни случая.)



в) (**3 т.**) Ако някой от правоъгълниците съдържа равен брой черни и бели единични квадратчета, то той е съставен от четен брой единични квадратчета. Затова е достатъчно да наблюдаваме само правоъгълниците с четен брой единични квадратчета, т.е. 7-те правоъгълника 2×1 и 2-та квадрата 2×2 (правоъгълникът 2×3 също съдържа четен брой единични квадратчета, но при произволна промяна той няма да изпълнява исканото условие). (За съображенията дотук се присъжда 1 т.) В първоначалното оцветяване 5 от тези правоъгълници изпълняват условието (4 от първия вид и 1 от втория). Промяна на цвета на кое да е от белите квадратчета води до намаляване с 2 броя на правоъгълниците от първия вид и не увеличава правоъгълниците от втория вид. Тъй като се интересуваме от промяна, която води до възможно най-голям правоъгълници с исканото свойство, заключаваме, че промяна трябва да се извърши с черно квадратче. В два от трите случая получаваме 6 правоъгълника с исканото свойство. В първия случай е променен цветът на горното ляво квадратче, в резултат на което се получават следните 6 правоъгълника:



Във втория случай е променен цветът на горното средно квадратче, при което се получават следните 6 правоъгълника с исканото свойство:



(Оценката от 3 т. се разпределя така: 2 т. за посочване на пример, в който 6 от правоъгълниците са с исканото свойство и 1 т. за обосновка, че не може да се смени цветът на някое квадратче, при което броят на правоъгълниците с исканото свойство да стане по-голям от 6. Без конкретен пример, но при познат отговор 6 се присъжда 1 т.)

Задача 4. В две книжарници пуснали на разпродажба книги от десет различни заглавия – пет в едната книжарница и пет в другата. За всяка книжарница петте книги с различни заглавия били с различни цени в точен брой левове. Евгени влязъл в първата книжарница и купил по една книга от петте заглавия, забелязвайки, че двете най-евтини книги струват общо 14 лв., а двете най-скъпи – общо 22 лв. След това отишъл във втората книжарница, откъдето също купил по една книга от петте заглавия в нея. За трите най-евтини книги той заплатил общо 28 лв., а за трите най-скъпи – общо 37 лв. Намерете колко лева общо е похарчил Евгени в двете книжарници.

Решение: Ако третата по цена книга в първата книжарница струва по-малко от 9 лв. (т.е. най-много 8 лв.), то двете най-евтини книги в тази книжарница биха стрували не повече от $7+6=13$ лв., което е по-малко от 14 лв. и следователно не е възможно. Ако третата по цена книга струва повече от 9 лв. (т.е. поне 10 лв.), то двете най-скъпи книги биха стрували поне $11+12=23$ лв., което е повече от 22 лв. и следователно също не е възможно. Заключаваме, че третата по цена книга струва точно 9 лв. и в първата книжарница Евгени е заплатил $14+9+22=45$ лв. Една възможна реализация на цените на книгите в лева е: 6, 8, 9, 10 и 12. (Показването на пример, при който се реализира условието в задачата, е част е решението.) (За тази част общо **3 т.** За доказателство само в едната посока **2 т.** и **1 т.** само за формулировка на твърдението, че третата по цена книга струва точно 9 лв., като точките не се събират.)

(За втората част на задачата общо **4 т.** За доказателство само в едната посока **2 т.** и **1 т.** само за формулировка на твърдението, че третата по цена книга струва точно 11 лв., като точките отново не се събират.) Ако третата по цена книга във втората книжарница струва по-малко от 11 лв. (т.е. най-много 10 лв.), то трите най-евтини книги в тази книжарница биха стрували общо не повече от $10+9+8=27$ лв., което е по-малко от 28 и следователно не е възможно. Ако третата по цена книга струва повече от 11 лв. (т.е. поне 12 лв.), трите най-скъпи книги биха стрували поне $12+13+14=39$ лв., което е повече от 37 лв. и следователно също е невъзможно. Заключаваме, че третата по цена книга струва точно 11 лв. Тогава общата цена на двете най-евтини книги е $28-11=17$ лв. и във втората книжарница Евгени е заплатил $17+37=54$ лв. Една възможна реализация на цените в лева е: 7, 10, 11, 12 и 14. (И тук показването на пример е част от решението.)

Общата стойност на покупките на Евгени е $45+54=99$ лв.