МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

РУСЕ, 29 – 30 януари 2008 г.

Тема за 12 клас

Кратки решения на задачите

Задача 12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$\log_{\frac{a+1}{a-1}}(x^2-x+1)<1$$

е изпълнено за всяко x.

Решение. Първо ще отбележим, че $x^2-x+1\geq\frac{3}{4}$ за всяко x, защото това неравенство е еквивалентно на $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$. Следователно при всяко x даденото неравенство има смисъл при $\frac{a+1}{a-1}>0$.

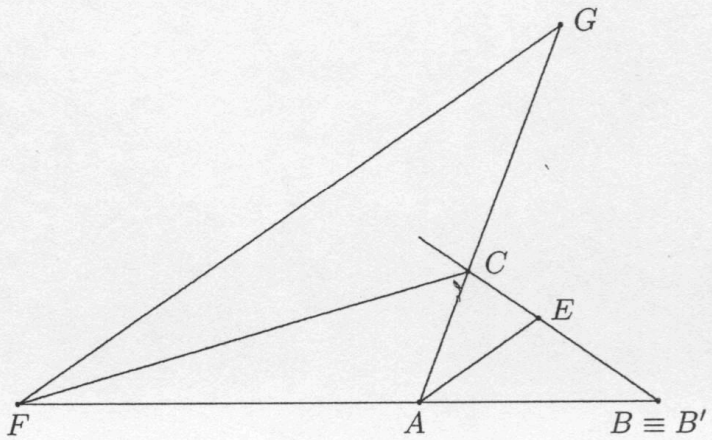
Нека $0<\frac{a+1}{a-1}<1$. Тогава $x^2-x+1>\frac{a+1}{a-1}>0$ за всяко x. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $\frac{a+1}{a-1}<\frac{3}{4}$, т.е. $0<\frac{a+1}{a-1}<\frac{3}{4}$. Оттук $a\in(-7,-1)$.

Ако $0<\frac{a+1}{a-1}>1$, то $x^2-x+1<\frac{a+1}{a-1}$ за всяко x, което е невъзможно.

Следователно $a\in(-7,-1)$.

Задача 12.2. Ъглополовящата на $\angle BAC$ в $\triangle ABC$ пресича страната BC в точка E, а външната ъглополовяща на $\angle ACB$ пресича лъча $BA^{\rightarrow}$ в точка F. Ако дължината на отсечката AF е равна на периметъра на $\triangle ACE$, да се намери отношението $\angle BAC:\angle ABC$.

Решение. Нека точката G от лъча $AC^{\rightarrow}$ е такава, че $AG=AF$. Тогава $\angle AGF=\angle BAC/2=\delta$. Нека сега точката B' от лъча $EB^{\rightarrow}$ е такава, че $EB'=AE$. Тогава $CB'=CG$ и понеже $\angle FCB'=\angle FCG$, то $\triangle FCB'\cong\triangle FCG$ по първи признак. Следователно $\angle CB'F=\delta$. Ако B' е между E и B, то $\angle CB'F<\angle CB'A=\angle EAB'<\delta$, противоречие.



math-bg.com

Ако пък B е между E и B', то $\angle CB'F > \angle CB'A = \angle EAB' > \delta$, което отново е противоречие. И така, $B' = B$, т.е. $\angle BAC = 2\angle ABC$.

Забележка. Възможно е и решение с тригонометрия.

Задача 12.3. Нека $f_k(x) = \frac{1}{k}\left(\sin^k x + \cos^k x\right)$. Да се намерят всички естествени числа m и n, $m \neq n$, за които функцията $f_m(x) - f_n(x)$ е константа.

Решение. Нека $m < n$ и $f_m(x) - f_n(x) = c$ за всяко $x \in R$. Като положим $x = 0$ и $x = \pi$ получаваме $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = c$ и $\frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^n}{n} = c$. Оттук и $m \neq n$ лесно следва, че m и n са четни числа. Нека $m = 2p$ и $n = 2q$. Сега полагаме $x = \frac{\pi}{4}$ и получаваме, че

$$(\star) \qquad \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} = c = \frac{1}{p2^p} - \frac{1}{q2^q}.$$

Ако $p = 1$, то от $(\star)$ следва, че $q = 1$. Тогава $m = n = 2$, което противоречи на условието $m \neq n$. Следователно $p \geq 2$ и $(\star)$ може да се запише във вида $\frac{q2^q}{p2^p} = \frac{2^q - 2}{2^p - 2}$. Нека $q = p + k$, където k е естествено число. Тогава горното равенство може да се запише във вида

$$(\star\star). \qquad k2^k = (2^{k+1} - 2)\frac{p}{2^p - 2}$$

Тъй като $k2^k \geq 2^{k+1} - 2$, то $\frac{p}{2^p - 2} \geq 1$, т.е. $p \geq 2^p - 2$. По индукция лесно следва, че $2^p - 2 > p$ при $p \geq 3$ и следователно $p = 2$. Тогава от $(\star\star)$ следва, че $k2^k = 2^{k+1} - 2$, т.е. $k = 1$. Оттук $q = 3$ и заключаваме, че $m = 4$, $n = 6$. Остава да докажем, че тези естествени числа изпълняват условието. Наистина, в този случай

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{4} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f_6(x) &= \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6} = \frac{1}{6}(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\ &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x}{6} = \frac{1}{6} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{2}. \end{aligned}$$

math-bg.com

Следователно $f_4(x) - f_6(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$.

Окончателно, търсените числа са $m = 4$, $n = 6$ или $m = 6$, $n = 4$

Задача 12.4. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството на реалните положителни числа.

а) Да се построи пример на функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, която има следното свойство:

$$2f(x^2) \geq xf(x) + x \quad \text{за всяко } x > 0.$$

б) Да се докаже, че ако $f(x)$ има свойството от а), то $f(x^3) \geq x^2$ при $x > 0$.

Решение. а) Например функцията $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \leq 1 \\ x \text{ при } x \geq 1 \end{cases}$ има исканото свойство.

б) Очевидно $f(x^2) > x/2$. Да предположим, че $f(x) > x^{a_n}/2^{1/2^n}$ за всяко $x > 0$ ($a_0 = 1/2$). Понеже $f(x^2) \geq x\sqrt{f(x)}$, то

$$f(x) \geq \sqrt{x}\sqrt{f(\sqrt{x})} > x^{\alpha_{n+1}}/2^{1/2^{n+1}}$$

където $a_{n+1} = 1/2 + a_n/4$. Сега от $a_{n+1} - 2/3 = (a_n - 2/3)/4$ следва, че $a_n \to 2/3$. Понеже $2^{1/2^n} \to 1$, заключаваме, че $f(x) \geq x^{2/3}$ при $x > 0$.

Задачите са предложени от:

Иван Тонов - 9.1, 9.3; Чавдар Лозанов - 9.2, 9.4; Иван Ланджев - 10.1, 10.3; Хаим Хаимов - 10.2; Петър Бойваленков - 10.4; Емил Колев - 11.1, 11.3; Александър Иванов - 11.2, 11.4; Олег Мушкаров - 12.1, 12.3; Николай Николов - 12.2, 12.4.

Брошурата е подготвена от Емил Колев

math-bg.com