Математически турнир „Иван Салабашев“, 2010 г.
Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Ако $m = 13^3 - 3^7$ и $n = 10$, то $\dfrac{m}{n}$ е:

А) -1 **Б)** 1 **В)** -10 **Г)** 10

Отговор: (Б). Имаме $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2197 - 2187}{10} = 1$.

2. Стойността на израза

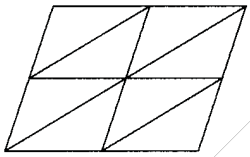
$$\left[\frac{(a^6b)^3}{(b^6c)^2} : \frac{(a^2c)^9}{(b^2a)^6}\right] : \left(\frac{ab}{c^3}\right)^3$$

при $a = 4$, $b = 7$ и $c = 8$ е:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** $\dfrac{1}{2}$

Отговор: (А). Изразът е равен на $\dfrac{a^{18}b^3b^{12}a^6}{b^{12}c^2a^{18}c^9} \cdot \dfrac{c^9}{a^3b^3} = \dfrac{a^3}{c^2}$. След заместване получаваме, че търсената стойност е 1.

3. Колко са успоредниците на фигурата?



А) 13 **Б)** 12 **В)** 11 **Г)** 10

Отговор: (А). Успоредниците са съставени от два, четири или осем триъгълника, като са съответно по 8, 4 и 1 от всеки от тези видове. Следователно търсеният брой е $8 + 4 + 1 = 13$.

4. Най-малкото цяло число, което е по-голямо от числото $a + b$, където $a = 6(2^2 + 3^2)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ и $b = 12(3^2 + 4^2)\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)$, е:

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5

Отговор: (Г). Имаме $a = 6(4 + 9)\dfrac{1}{6^2} = \dfrac{13}{6}$ и $b = 12(9 + 16)\dfrac{1}{12^2} = \dfrac{25}{12}$, откъдето $a + b = \dfrac{17}{4} = 4\dfrac{1}{4}$ и значи търсеното число е 5.

5. Дължините на всички страни на 100-ъгълник M са увеличени с по 1%. С колко процента периметърът на новия многоъгълник е по-голям от периметъра на M?

А) 1% **Б)** 10% **В)** 100% **Г)** 0%

Отговор: (А). Ако периметърът на M е $P = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$, но новият периметър е $P_1 = 1.01a_1 + 1.01a_2 + \cdots + 1.01a_{100} = 1.01(a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}) = 1.01P$, т.е. увеличението е с 1%.

6. В числото $a = \overline{501x73y}$ цифрите x и y са такива, че a се дели на 5 и на 9 и дава остатък 2 при деление на 4. Да се намери x.

А) 0 **Б)** 1 **В)** 5 **Г)** друго число

Отговор: (Г). От делимостта на 5 следва, че $y = 0$ или 5, а остатък 2 при делени на 4 дават само четните числа, т.е. $y = 0$. Тъй като a се дели на 9, сумата от цифрите му също се дели на 9, т.е. $16 + x + y$ се дели на 9. Тогава $x = 2$, т.е. правилният отговор е "Друго число".

7. Колко са петцифрените числа, които не се делят на 1000, а първата и последната им цифра са четни?

А) 19950 **Б)** 19954 **В)** 19960 **Г)** 19964

Отговор: (В). Ако забравим за момент за делимостта на 1000, първата цифра може да е 2, 4, 6 или 8 (4 възможности), втората, третата и четвъртата могат да са произволни (по 10 възможности), а петата може да е 0, 2, 4, 6 или 8 (5 възможности). Получаваме общо $4.10.10.10.5 = 20000$ числа. От тях на 1000 се делят $20000, 21000, \ldots, 29000, 40000, \ldots, 89000$, общо 40 числа. Следователно търсеният брой е $20000 - 40 = 19960$.

8. Числата $1, 2, 3, \ldots, 24$ са разбити на 12 двойки и от всяка двойка (a, b) е образувана дроб $\frac{a}{b}$. Колко най-много от тези дроби могат да бъдат цели числа?

А) 9 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 12

Отговор: (Б). Простите числа 13, 17, 19 и 23 могат да дадат дроб, която е цяло число, само ако са в двойка с 1. Това означава, че поне две от дробите няма да са цели числа, т.е. търсеният максимален брой не надминава 10. От друга страна, следните 10 двойки: $(4, 2)$, $12, 6)$, $(14, 7)$, $15, 5)$, $(16, 8)$, $(18, 9)$, $20, 10)$, $(21, 3)$, $(22, 11)$ и $13, 1)$ (остават например $(17, 19)$ и $(23, 24)$) дават цели числа.

9. Една лодка изминава за едно и също време 34 км по течението и 26 км срещу течението на една река. Каква е скоростта на течението на тази река, ако е известно, че в спокойна вода лодката се движи със скорост 15 км/ч?

А) 1,5 км/ч **Б)** 2 км/ч **В)** 3 км/ч **Г)** 4 км/ч

Отговор: (Б). Ако скоростта на течението е x, то скоростите по и срещу течението са съответно $15 + x$ и $15 - x$. Тогава от условието следва, че $\frac{34}{15+x} = \frac{26}{15-x}$, откъдето последователно имаме $510 - 34x = 390 + 26x$, $60x = 120$, $x = 2$.

10. С $n!$ се означава произведението на всички естествени числа от 1 до n, т.е. $n! = 1.2.3 \ldots n$. Кое е най-малкото естествено число n, за което $n!$ се дели едновременно на 11 и 12?

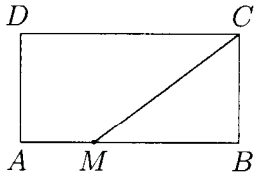
А) 10 **Б)** 11 **В)** 12 **Г)** 13

Отговор: (Б). Тъй като 11 е просто число, няма как $n!$ да се дели на 11 при $n \leq 10$. От друга страна, $11!$ се дели на 11 (защото съдържа множител 11) и на 12 (защото съдържа множители 3 и 4). Следователно търсеното число е 11.

11. Естественото число n е произведение на две прости числа, а сумата от всичките му естествени делители, без самото n, е 1012. Да се намери n.

Отговор: (2018). Нека $n = pq$, където p и q са прости числа. Тогава от условието следва, че $1 + p + q = 1012$. Тъй като $p + q = 1011$ е нечетно число, едно от числата p и q е равно на 2. Тогава другото е равно на 1009 (което е просто число) и получаваме $n = pq = 2.1009 = 2018$.

12. Даден е правоъгълник $ABCD$, в който страната AB е два пъти по-голяма от страната BC. Върху страната AB е избрана точка M така, че $3AM = AB$. Да се намери лицето на $ABCD$, ако разликата в периметрите на четириъгълника $AMCD$ и триъгълника BMC е 40 см.

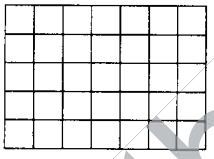


Отговор: (1800). Да означим $AM = x$. Тогава $AB = 3x$ и $BC = \dfrac{3x}{2}$, а интересуващите ни периметри са съответно $P_{AMCD} = x + MC + 3x + \frac{3x}{2} = \frac{11x}{2} + MC$ и $P_{MBC} = 2x + \frac{3x}{2} + MC = \frac{7x}{2} + MC$. Следователно $30 = P_{AMCD} - P_{MBC} = 2x$, откъдето $x = 20$. Тогава $AB = 3x = 60$, $BC = AB/2 = 30$ и $S_{ABCD} = 60.30 = 1800$.

13. Нека n е такова естествено число, че последната цифра на числото $A = n^2 + 1008n$ е 4. Да се намери предпоследната цифра на A.

Отговор: (8). Тъй като $1000n$ завършва на три нули, A има същите последни три цифри, както и числото $B = A - 1000n = n^2 + 8n$. От условието следва, че $B + 16 = (n+4)^2$ завършва на 0, а тъй като е точен квадрат, трябва да завършва на две нули. Тогава B, оттам и A, завършва на $100 - 16 = 84$, т.е. търсената предпоследна цифра е 8.

14. Най-много колко фигурки от вида  могат да се разположат в правоъгълник 5×7 ?



(Фигурките могат да се завъртат и обръщат, но не и да се припокриват.)

Отговор: (11). Тъй като лицето на една фигурка е 3, а лицето на правоъгълника е 35, няма как да имаме повече от 11 фигури без припокриване (защото $11.3 < 35 < 12.3$). Не е трудно да се посочи пример с 11 фигури.

15. Произведението на цифрите на едно естествено число е 180. Да се намери най-голямата възможна стойност на това число, ако е известно, че никои две от неговите цифри не са еднакви.

Отговор: (65321). Цифрите, които са делители на 180, са $1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 9. Тъй като търсим максимално число, 1 със сигурност участва (иначе ще я добавим и ще увеличим числото, а произведението остава същото). Ако 9 участва в числото, останалите цифри са с произведение 20 и единствената възможност е 1, 4 и 5, като нашето число е четирицифрено.
Ако 9 не участва, непременно участват 3 и 6 (иначе произведението няма да се дели на 9). Останалите цифри са с произведение 10 и единствената възможност е 1, 2 и 5. Числото сега е петцифрено (значи по-голямо от горното) и е най-голямо, ако цифрите му се наредят в низходящ ред, т.е. 65321.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.