

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ „ИВАН САЛАБАШЕВ“ - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир „Иван Салабашев“
4 декември 2010 г.

Тема за 10., 11., 12. клас
(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 6 има 4 отговора, само един от които е верен. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 3 точки. За вярно решение на всяка от задачи 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници може да намерите на адрес <http://www.math.bas.bg/salabashev/>.

Журито Ви пожелава приятна работа.

1. За колко стойности на реалния параметър a правите

$$x + y = 10, \quad x + y = 11, \quad x + 2y = 12, \quad x + 2y = a$$

ограждат четириъгълник, в който може да се впише окръжност?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

2. Колко са реалните решения на системата

$$\begin{cases} \sqrt{x+y^2} = z+1 \\ \sqrt{y+z^2} = x+1 \\ \sqrt{z+x^2} = y+1 \end{cases}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

3. Колко са различните цифри в десетичния запис на n^3 , където $n = 999\ 999\ 999$?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

4. Средното аритметично на неотрицателните цели числа, ненадминаващи 8888, и нямащи девятки в десетичния си запис, е записано като несъкратима дроб. Броят на простите делители на числителя на тази дроб е равен на:

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

5. Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle ABC = 120^\circ$. Ако $D \in AC$, $\angle ABD = 90^\circ$ и $AB = CD = 1$, то AD^3 е равно на:

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

6. Броят на ненаредените двойки (m, n) от естествени числа, за които m дели $2n+1$ и n дели $2m+1$, е равен на:

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Задача 7. Нека $a_0 = 1$ и $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 a_i$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

- a) съществуват числа $p, q, r \in \mathbb{R}$ такива, че $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ за всяко $n \geq 1$;
b) $a_{n+1} > (2 + \sqrt{2})a_n$ при $n \geq 1$.

Задача 8. Да се докаже, че ако $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, то

$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} \leq 1.$$