Математически турнир „Иван Салабашев“, 2010 г.
Решения на задачите от темата за 10.-11.-12. клас

1. За колко стойности на реалния параметър a правите

$$x+y=10, \quad x+y=11, \quad x+2y=12, \quad x+2y=a$$

ограждат четириъгълник, в който може да се впише окръжност?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор В). Тези прави ограждат успоредник, една от страните, на които се мени успоредно на правата $x+2y=0$. В успоредник може да се впише окръжност точно когато той е ромб, а това се реализира за две стойности на a (симетрични спрямо 12).

2. Колко са реалните решения на системата $\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+y^2}=z+1\\ \sqrt{y+z^2}=x+1\\ \sqrt{z+x^2}=y+1\end{array}\right.$?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор Б). Имаме, че $x,y,z\geq -1$. От друга страна, като повдигнем уравненията на квадрат и ги съберем, получаваме $x+y+z=-3$. Значи $x=y=z=-1$, като това е решение на системата.

3. Колко са различните цифри в десетичния запис на n^3, където $n=999\,999\,999$?

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 8.

Отговор Б). Ако $n=10^k-1$, то $n^3=10^{2k}(10^k-3)+(3.10^k-1)=9\ldots970\ldots029\ldots9$ (където първите девятки и нулите са по $k-1$, а последните девятки са k на брой).

4. Средното аритметично на неотрицателните цели числа, ненадминаващи 8888, и нямащи девятки в десетичния си запис, е записано като несъкратима дроб. Броят на простите делители на числителя на тази дроб е равен на: **А)** 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор В). Нека $a_0 10^3+a_1 10^2+a_2 10+a_3$ е едно от разглежданите числа. Тогава a_i може да е всяка цифра от 0 до 8 и значи средната стойност на a_i е равна на $\frac{0+1+\cdots+8}{9}=4$. Следователно разглежданото средно аритметично е равно на $4(1+10+10^2+10^3)=2^2.11.101$.

5. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC=120^\circ$. Ако $D\in AC$, $\sphericalangle ABD=90^\circ$ и $AB=CD=1$, то AD^3 е равно на:

А) 2; **Б)** 3; **В)** 4; **Г)** 5.

Отговор А). Нека $x=AD$ и $y=BC$. Тогава $\sin\sphericalangle ADB=\frac{1}{x}$ и $\frac{\sin\sphericalangle BDC}{y}=\frac{\sin 30^\circ}{1}=\frac{1}{2}$, откъдето $\frac{1}{x}=\frac{y}{2}$. Следователно

$$-\frac{1}{2}=\cos\sphericalangle ABC=\frac{1+y^2-(1+x)^2}{2y}=\frac{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2-(1+x)^2}{\frac{4}{x}}.$$

Оттук $x^4+2x^3-2x-4=0$, т.е. $(x+2)(x^3-2)=0$ и значи $x=\sqrt[3]{2}$.

6. Броят на ненаредените двойки (m,n) от естествени числа, за които m дели $2n+1$ и n дели $2m+1$, е равен на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор В). Нека $m \le n$, $k = \frac{2m+1}{n}$ и $l = \frac{2n+1}{m}$. Тогава $m = \frac{k+2}{kl-4}$ и $n = \frac{l+2}{kl-4}$. Следователно $1 \le kl - 4 \le k + 2$, т.е. $\frac{5}{l} \le k \le \frac{6}{l-1}$ и $1 \le k \le l$. Оттук $3 \le l \le 7$. При $5 \le l \le 7$, следва, че $k = 1$, при $l = 4 - k = 2$, а при $l = 3 - k = 2$ или $k = 3$. Непосредствена проверка показва, че решения имаме само при $(k, l) = (1, 5), (1, 7), (3, 3)$ и те са $(m, n) = (3, 7), (1, 3), (1, 1)$.

Задача 7. Нека $a_0 = 1$ и $a_n = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^2 a_i$ при $n \ge 1$. Да се докаже, че:
а) съществуват числа $p, q, r \in \mathbb{R}$ такива, че $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ за всяко $n \ge 1$.
б) $a_{n+1} > (2 + \sqrt{2})a_n$ при $n \ge 1$.

Решение. а) Като пресметнем първите шест члена, намираме, че $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ при $n = 1, 2, 3$. Ще докажем това за всяко $n \ge 1$. Имаме, че

$$a_{n+1} - a_n = a_n + \sum_{i=0}^{n-1}((n+1-i)^2 - (n-i)^2)a_i = \sum_{i=1}^{n}(2n+1-2i)a_i.$$

Тогава

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}(2n+3-2i)a_i$$

и като извадим тези равенства получаваме

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = a_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Остава да извадим това равенство от

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1} = a_{n+2} + 2\sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

б) Неравенството се проверява директно при $n = 1, 2$. При $n \ge 3$ от а) имаме, че

$$a_{n+1} > 4a_n - 2a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n+1} - (2+\sqrt{2})a_n > (2-\sqrt{2})(a_n - (2+\sqrt{2})a_{n-1})$$

и твърдението следва по индукция.

Оценяване. а) 4 т., от които 2 т. ако само са посочени p, q и r; 2 т. за б).

Задача 8. Да се докаже, че ако $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, то

$$\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c} \le 1.$$

Решение. Понеже $a, b, c \le \sqrt{3} < 4$, ако някое от тези числа е отрицателно, като го сменим с противоположното му, неравенството се усилва. И така, можем да считаме, че $a, b, c \ge 0$. От $3 = a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$ следва, че $abc \le 1$ и значи $ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3abc$. Тогава

$$3(4-a)(4-b)(4-c)\left(\frac{1}{4-a} + \frac{1}{4-b} + \frac{1}{4-c}\right)$$
$$= 4(12 - 6(a+b+c) + (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2) + ab + bc + ca - 3abc$$

$$\geq 4(9 - 6(a+b+c) + (a+b+c)^2) = 4(a+b+c-3)^2 \geq 0.$$

Оценяване. 3 т. за преобразуване на неравенството до $4(a+b+c-3)^2+ab+bc+ca \geq 3abc$ и 3 т. за довършване на решението. 4 т. ако неравенството е доказано само за неотрицателни числа.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.