НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ
„АКАД. ЛЮБОМИР ЧАКАЛОВ“
Лицей към СУ „Св. Климент Охридски“
София 1164, ул. Бигла 52, тел. 862 83 63, 862 29 66
e-mail: npmg@npmg.org, npmg_sofia@abv.bg, skype: npmg_sofia
http://www.npmg.org, http://mathnpmg.blogspot.com

Конкурсен изпит по математика за НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Вариант 1

06.06.2010 г.

Задача 1. Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството

$$(x+3)^2 - x(x-1)(x+1) \geq (x+2)(x-2) + (1-x)(x^2+x+1)$$

Задача 2. Решете уравнението $2x(x^2+1)(x^2-2|2-2^2|)=0$.

Задача 3. Да се реши уравнението $|(-x-1)^2 - x(x+1)| = 2M$, където $M = \dfrac{2^{2010} - (2^{502})^4}{4^{1004} + 2^{2009}}$.

Задача 4. В три торби има общо 36 килограма брашно. Втората торба съдържа $\dfrac{9}{25}$ от количеството брашно в първата торба, а третата торба съдържа $22\dfrac{2}{9}\%$ от количеството брашно във втората торба. По колко килограма брашно има във всяка торба.

Задача 5. Една обущарска фирма сключила договор с търговска фирма да ѝ предоставя по 180 чифта обувки на ден от даден модел. В действителност обущарската фирма произвеждала с 15 чифта обувки на ден повече от договореното, поради което един ден преди изтичане на договора тя произвела 120 чифта обувки над договореното количество. Колко чифта обувки е трябвало да произведе обущарската фирма по договор?

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle BAC = 30°$, $\sphericalangle ABC = 45°$, височина $CH (H \in AB)$ и медиана BM $(M \in AC)$. Да се намери големината на $\sphericalangle BMC$.

Задача 7. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90°$) височината е CD $(D \in AB)$, ъглополовящата на $\sphericalangle BCD$ е CL $(L \in AB)$, точката M е средата на CL и правата AM пресича CD и CB съответно в точките Q и S. Да се докаже, че $CQLS$ е ромб.

Задача 8. Даден е тъпоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ABC > 90°$), в който ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича страната BC в точка M. Избрана е точка P от страната AC, така че $\sphericalangle PMC = \sphericalangle BAC$. Да се докаже, че $MP = MB$.

Задача 9. Да се докаже, че ако a, b и c са дължините на страните на триъгълник, то

$$a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2.$$

Задача 10. Докажете, че уравнението $x^2 + 2010 = y^2$ няма решение в цели числа.

Време за работа: 4 астрономически часа

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки.
Пожелаваме Ви успешна работа!